Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de seconde générale et technologique

Méthodes et pratiques scientifiques Thème science et vision du monde - projet « autour de la cristallographie »

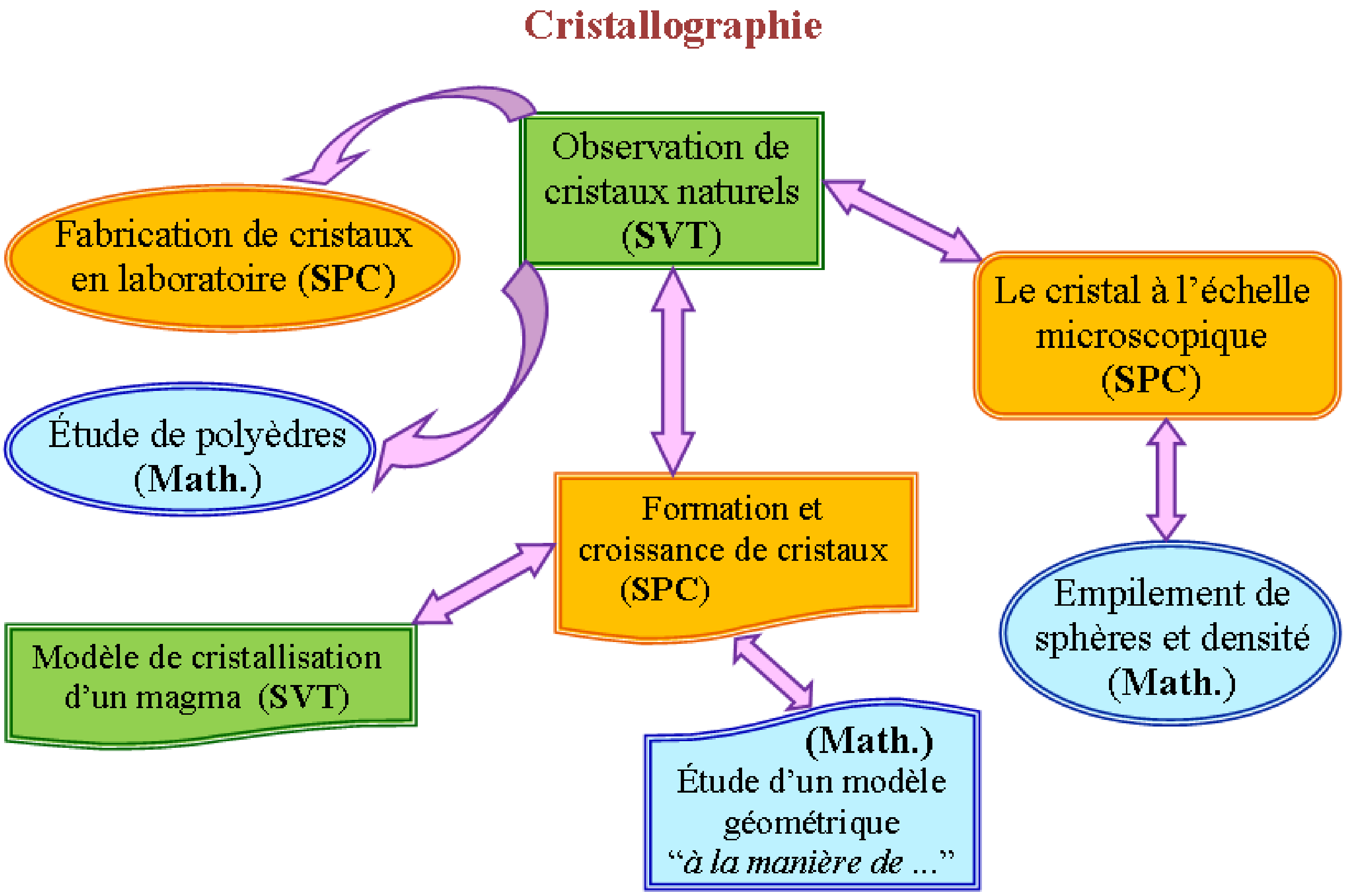
Enseignement d'exploration

25 août 2010
(édition provisoire)

Thème « Science et vision du monde »

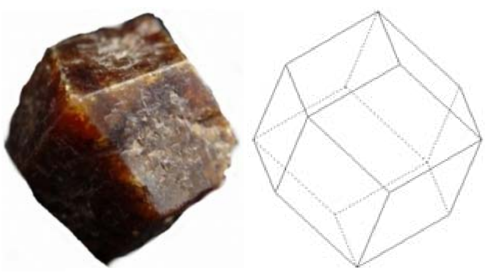
Projet : « autour de la cristallographie »

La détermination d'une roche nécessite la connaissance de sa composition minéralogique qui est déterminée par les propriétés des cristaux observés en lame mince au microscope photonique muni d'un dispositif d'analyse et de polarisation de la lumière. Les propriétés optiques des minéraux dépendent en partie de leur forme géométrique (mailles cristallines) fondées sur des éléments mathématiques (polyèdre, éléments de symétrie). Le lien entre la taille des cristaux et la vitesse de refroidissement peut être établie à partir d'expériences de modélisation analogique. Le lien entre la nature des cristaux et leur composition chimique peut être établi à partir d'expériences de modélisation numérique. Le lien entre structure cristalline et densité permet de comprendre la structure cristalline de la matière solide dans les profondeurs du globe.
Le diagramme ci-dessous indique une articulation possible entre les disciplines autour de ce projet



Chaque discipline éclaire le projet à sa lumière en le déclinant selon sa spécificité.

- Séance d'observation de cristaux en SPC et SVT et étude de polyèdres et de quelques cubes tronqués en mathématiques.
- Croissance de cristaux en SPC et SVT en articulation avec l'étude d'un modèle mathématique.
- Étude de la structure cristalline du chlorure de sodium en SPC en liaison avec les propriétés mathématiques du cube et la densité d'un empilement de sphères.



Cristal de Grenat grossulaire en forme de ***dodécaèdre rhombique***

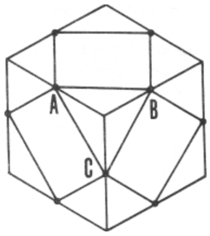
Certaines activités proposées dans ce document contiennent des résultats expérimentaux obtenus par des élèves de seconde d'un lycée de l'académie de Montpellier ayant travaillé sur ce sujet dans le cadre d'une « Option Sciences »

Activité 1 : Constructions de polyèdres

☞ **Étude de quelques cubes tronqués**

Une organisation possible consiste à répartir les élèves en groupes, chaque groupe étant investi d'une « mission » scientifique.

Le "cube-octaèdre d'Archimède"

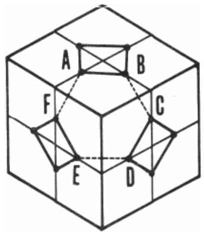


Imaginons un cube en bois, ou de polystyrène sur lequel on marque le milieu des arêtes, (par exemple, comme les trois points A, B et C du cube ci-contre où seules ses faces visibles sont représentées). Ensuite, on découpe d'un trait de scie un morceau tétraédrique à chaque coin du cube, chaque trait de scie passant par trois milieux (ainsi, par exemple, on donne un trait de scie suivant ABC).
Le solide obtenu après un tel découpage s'appelle le ***"cube-octaèdre d'Archimède"***

Mission 1 : Décrire le ***"cube-octaèdre d'Archimède"*** [sommets, arêtes et faces] et en réaliser un patron en partant d'un cube de 8 cm d'arête.

Mission 2 : Déterminer l'aire et le volume d'un cube ***"cube-octaèdre d'Archimède"*** dont les arêtes ont pour longueur a.

Le "polyèdre de lord Kelvin"



Ce polyèdre peut s'obtenir comme le cube-octaèdre d'Archimède mais ici, on scie selon des sections passant par des points situés aux quarts des médiatrices des faces, comme A, B, C, D, E, F.

Mission 1 : Décrire le ***"polyèdre de lord Kelvin"*** [sommets, arêtes et faces] et en réaliser un patron en partant d'un cube de 8 cm d'arête.

Mission 2 : En utilisant plusieurs ***"polyèdre de lord Kelvin"***, trouver comment ces polyèdres "pavent" l'espace [*ceci signifie que l'espace peut être rempli par des polyèdres de lord Kelvin de mêmes dimensions, accolés les uns aux autres sans qu'il subsiste de trou*].

Compléments pour le professeur : Annexe 1 : observation de cristaux et constructions de polyèdres

☞ Des ***rhomboèdres tronqués...*** au ***triacontaèdre rhombique !***

Mission 1 : Construire un rhomboèdre dont les six faces sont des losanges identiques, selon la démarche suivante :

- ❖ tracer un triangle TRI rectangle en T tel que TI = 2,3 cm et la tangente de l'angle $\widehat{RIT}$ est égale à 2.
- ❖ construire le losange MIRE tel que les points M, T, I soient alignés.

Mission 2 : Construire un *triacontaèdre rhombique* constituée de 30 losanges parfaitement identiques construits selon le modèle précédent.

Mission 3 : Reconstituer un *triacontaèdre rhombique* à l'aide de *rhomboèdres* obtenus lors de la mission 1.

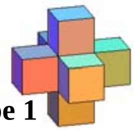
Compléments pour le professeur

Mission 1 : en fait il y a deux rhomboèdres possibles, ***un rhomboèdre "aigu" et un rhomboèdre "obtus"*** qui ont pour faces six mêmes losanges construits selon le modèle décrit précédemment.
Annexe 2 : rhomboèdres tronqués
Annexe 3 : patron du ***rhomboèdre "obtus"***
Annexe 4 : patron du ***rhomboèdre "aigu"***

<u>Activité 2 : Croissance d'un cristal</u>

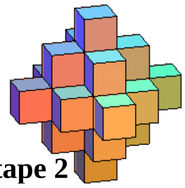
La cristallographie a fait un grand pas en avant avec l'abbé **René Just Haüy** et sa théorie des cristaux dont l'histoire raconte qu'il l'a élaborée à la suite de la chute d'un cristal de calcite qui se brisa en une multitude ***de rhomboèdres*** aux formes identiques.
D'où l'idée de construire un "*cristal*" à partir de cubes identiques, à la manière de l'abbé René-Just Haüy et de *le faire croître…*

Version destinée aux élèves



étape 1

En partant d'un cube [**étape 0**], plaçons un cube identique sur chacune de ses faces pour obtenir le "*cristal*" ci-contre" [**étape 1**]



étape 2

Puis rajoutons des cubes pour obtenir le "*cristal*" ci-contre" [**étape 2**]

Et continuons "*ainsi de suite*"...

<u>Mission 1</u> : Si on poursuit cette construction, quel "*polyèdre limite*" va-t-on ainsi obtenir et combien de cubes faudra-t-il pour réaliser le "cristal" à l'**étape *n*** ?

<u>Mission 2</u> : Calculer le volume du "*cristal*" ainsi que de celui du "*polyèdre limite*" à différentes étapes et pour de très grandes valeurs de *n*.

<u>Mission 3</u> : Calculer l'aire latérale du "*cristal*" ainsi que celle du "*polyèdre limite*" à différentes étapes et pour de très grandes valeurs de *n*.

Compléments pour le professeur

:

<u>Mission 1</u> : Par exemple, raisonner par tranches à partir de la "*tranche centrale*" [annexe 5 : Cristallographie avec des cubes : indications pour le professeur] et donner aux élèves le puzzle permettant de conjecturer une formule pour additionner les *n* premiers entiers impairs.
Pour découvrir le "*polyèdre limite*", on pourra également faire construire le cristal de l'étape 1 sur Geospace, par exemple, et faire trouver comment obtenir un *octaèdre* [voir le fichier cristallographie6_math.g3w dans l'archive cristallo-geométrie.zip séparée.

Missions 2 et 3 :

Voir annexe 5. pour les premières formules.

Pour de grandes valeurs de *n* : voir le fichier cristallographie7_math.xls dans l'archive cristallo-tableur.zip

<u>Activité 3 : Cristaux et empilements de sphères</u>

Comment empiler des sphères de façon à obtenir un tas occupant le plus petit volume possible ?
Ce problème, en apparence anodin, mais dont le champ d'application s'étend de **l'étude des cristaux** à la théorie des codages informatiques, mis à mal les mathématiciens pendant près de quatre siècles : dès 1610, Kepler formulait une conjecture sur la question, mais il aura fallu attendre 1998 pour que les travaux de Thomas Hales en apportent la preuve de façon rigoureuse.

Avec des boulets de canon...
Devant certains musées, on trouve parfois, à côté de canons, des pyramides à base carrée formées de boulets

<u>Mission 1</u> : Quel est le nombre de boulets pour construire une telle pyramide (la base au sol est un carré dont le est formé par 5 boulets)? Ce nombre (qu'on peut noter **Pycar**$_{5)}$ en tant est le cinquième "*nombre pyramidal carré*". Déterminez les 15 premiers nombres pyramidaux carrés.

<u>Mission 2</u> : En considérant que ces boulets sont sphériques de diamètre mesurant 12 cm, quelle est la hauteur d'une telle pyramide? Et celle de la pyramide numéro *n* ?

Compléments pour le professeur

Voir annexe 6 : empilements de sphères avec des boulets de canon.

Activité 4 : Densité d'un empilement de sphères

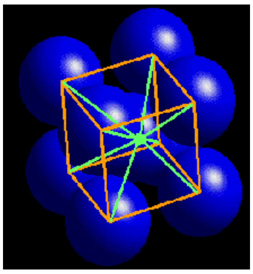
Il s'agit de faire calculer par les élèves des densités dans des cas relativement simples
[annexe 7 : densité d'un empilement de sphères]

☞ Cas d'un **assemblage cubique simple :** les sphères sont simplement empilées en couches successives disposées en carré.

On démontre que l'on obtient $d = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236...$

☞ Cas d'un **assemblage cubique centré :** la densité précédente peut être grandement améliorée en espaçant légèrement les sphères de façon à pouvoir insérer une sphère supplémentaire au centre de chaque cube élémentaire de telle sorte que les sphères soient tangentes selon la diagonale principale du cube dont les sommets sont les centres des 8 sphères "extérieures" comme ci-contre.
On obtient alors l'***assemblage cubique centré***.

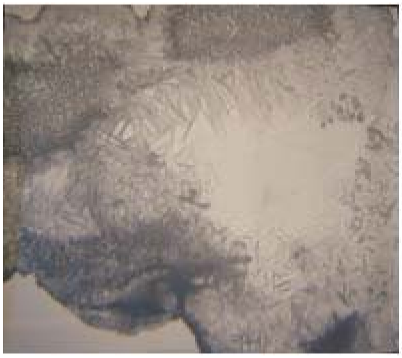
On démontre que l'on obtient $d = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}6802...$

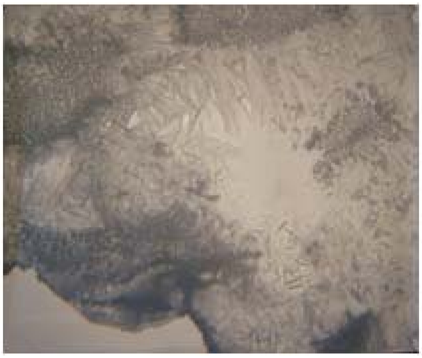


Activité 5 : Formation des cristaux

Au cours de cette séance, il s'agit de fabriquer des cristaux de formes différentes à travers des expériences "spectaculaires" afin d'éveiller la curiosité et de motiver des élèves pour les séances suivantes. Les expériences retenues sont les suivantes :

✯ Cristallisation rapide de l'acide benzoïque sur une plaque de verre (expérience réalisée par le professeur).





On voit croitre les cristaux (« les aiguillent s'allongent »).

✯ Cristallisation après sublimation de l'acide benzoïque.

✯ Cristallisation du sulfate de cuivre.

Cette expérience est à effectuer en premier si on veut voir la cristallisation démarrer dans le temps de la séance. Les cristaux seront récupérés une semaine plus tard et isoler avec des pinces.
Ce choix d'expériences permet d'obtenir des cristaux de deux formes différentes en aiguilles pour l'acide benzoïque et en losanges pour le sulfate de cuivre.
Cette séance permet aussi de commencer à aborder les conditions de cristallisation.
Remarque: Bien entendu, on peut choisir bien d'autres expériences de cristallisation pour illustrer cette séance.

Exemple de fiche pour cette séquence : annexe 8 : expériences de cristallisation

Activité 6 : Recherche de protocoles expérimentaux permettant de définir les meilleures conditions de cristallisation du sel

Objectifs : développer l'autonomie des élèves et la prise d'initiative, ainsi que le travail collectif. Le professeur n'est là que pour cadrer le dispositif pour que les élèves s'approprient les démarches expérimentales.

On se propose d'étudier les facteurs naturels qui influent sur les techniques d'extraction du sel et de voir l'incidence qu'ils peuvent avoir sur la nature des cristaux obtenus.

Données :

Pour optimiser la récolte de sel à partir de l'eau de mer, le procédé utilisé dans les salines se fait en plusieurs étapes. Le sel ou chlorure de sodium est dissous dans l'eau de mer. Il faut concentrer cette solution en chlorure de sodium afin d'atteindre une concentration de 260 g.L^{-1}. Pour cela on doit laisser évaporer l'eau par passage successif dans les partènements. Lorsque la concentration est voisine de 260 g.L^{-1}, on stocke l'eau sur les tables salantes, où sous l'effet du soleil et du vent, l'eau va s'évaporer et la cristallisation s'amorcer. Le sel se dépose au fond des bassins par décantation.

Les Salines du Midi

Données numériques :

Salinité de l'eau en mer : La moyenne est de 35 g.L^{-1}, mais varie d'une mer à l'autre : 30 g.L^{-1} en Atlantique Nord, 40 g.L^{-1} en mer Rouge, 6 g.L^{-1} en surface en mer Baltique et 330 g.L^{-1} dans la mer Morte.
Solubilité maximale du chlorure de sodium dans l'eau : 360 g.L^{-1}.
Concentration massique de l'eau dans les marais salants juste avant la phase d'évaporation finale de l'eau : 260 g.L^{-1}.

Mission 1 : Expliquer la fabrication des cristaux de sel en indiquant les facteurs naturels qui favorisent la formation des cristaux.

Mission 2 : Proposer un dispositif expérimental permettant de fabriquer des cristaux de sel dans la salle de classe en reproduisant les conditions de fabrication dans les salines. Fabriquer des cristaux de sel pour différentes concentrations de sel.

Aides pour la mission 1 :

Pourquoi les salins s'étalent sur de grandes surfaces ?
Quel est le rôle du soleil ?
Quel est le rôle du vent ?
Lors de la décantation, quels sont les deux facteurs naturels qui peuvent influencer l'évaporation de l'eau ?

Aides pour la mission 2 :

Comment simuler le bassin de décantation, les deux facteurs naturels ?
Quelles concentrations allez-vous choisir ? (cf. salinité de l'eau de mer)
Note : les cristaux n'on pas la même apparence, veiller à ce que les concentrations choisies par les élèves soient différentes d'un groupe à l'autre.
Donner le matériel expérimental à la demande des élèves.

Matériel à la disposition des élèves : matériel de chimie, sel cristallisé, lampe, sèche-cheveux…

Ressource pour le professeur : Annexe 9 : version détaillée qui comporte des données expérimentales obtenues par des élèves sur l'influence des facteurs naturels

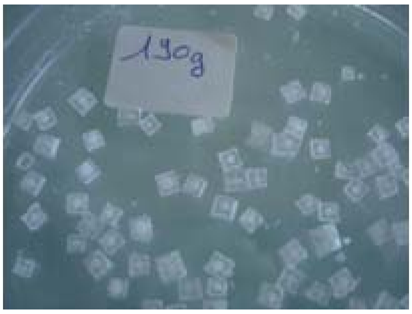
Remarques pour la mise en œuvre des expériences :

Le professeur veille à ce que les différents groupes fabriquent des solutions de sel de concentration différente. Les élèves ont proposé généralement de simuler le vent par un sèche-cheveux et le soleil par une lampe.

Des propriétés sont mises en évidence pour obtenir "les plus beaux cristaux".

Au cours de la semaine on peut proposer aux élèves de passer régulièrement pour voir au bout de combien de temps la cristallisation démarre ou est obtenue.

Quelques exemples de cristaux de sel obtenus par les élèves :



Dans la réalisation expérimentale, un groupe peut travailler sur la cristallisation du sulfate de cuivre en proposant de la déclencher avec un germe de sulfate de cuivre. Un défi peut être proposé pour fabriquer des « plus beaux cristaux de sulfate de cuivre » en intégrant dans le mode opératoire les propriétés mises en évidence lors de l'étude de la cristallisation du chlorure de sodium (solution de différentes concentrations, lenteur de la formation des cristaux…). Le professeur peut aussi en fabriquer pour la séance suivante.

Activité 7 : Observation des cristaux à l'échelle microscopique

Objectifs : utilisation de la loupe binoculaire ; dessin d'observation faisant apparaitre les caractéristiques communes des cristaux quelque soit leur taille pour une espèce chimique donnée (diagonale sur les cristaux de chlorure de sodium qui correspond à la direction de croissance des cristaux).

La séance d'observation des cristaux est mise en place en partenariat avec le professeur de SVT. Les élèves vont observer les cristaux de chlorure de sodium obtenus dans les différents bacs lors de la séance précédente ainsi que ceux de sulfate de cuivre qu'ils récupèrent avec des pinces :

Activité 8 : Étude de la structure cristalline microscopique du chlorure de sodium

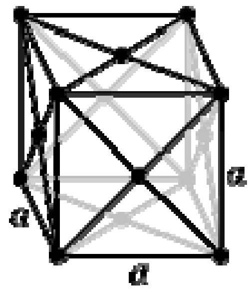
Il s’agit d’expliquer la structure cristalline du chlorure de sodium en faisant apparaitre l’empilement des ions sodium et chlorure dans la maille de chlorure de sodium.

Ce travail fait appel aux propriétés mathématiques du cube, aux volumes du cube et de la sphère, à l’empilement de sphères, points qui ont été abordés parallèlement dans le module par le professeur de mathématiques.

Objectif : Expliquer la forme des cristaux de chlorure de sodium à partir d’un modèle microscopique d’arrangement des entités chimiques.

Données : Le chlorure de sodium (de formule brute NaCl) est un composé ionique formé d’ions sodium (Na^+) et d’ions chlorure (Cl^-). A l’état solide c’est un cristal : il présente une structure périodique et symétrique.

En cristallographie, la maille élémentaire (ou maille) est la plus petite partie de l’espace qui se reproduit identique à elle-même dans tout le cristal.



Le sel est un assemblage d’ions sodium et chlorure basé sur une structure cubique à faces centrées.
Les ions sodium et chlorure sont rangés chacun suivant une structure cubique à faces centrées de côté *a*, en translation l’une par rapport à l’autre de *a*/2.

<u>Mission 1</u> : Représenter une maille du cristal de chlorure de sodium.

Expliquer la cohérence entre la structure cristalline microscopique et la formule brute du chlorure de sodium.

<u>Mission 2</u> : Déterminer la compacité du cristal de chlorure de sodium.

Proposer une interprétation des deux diagonales observables à l’œil nu sur les cristaux de chlorure de sodium fabriqués.

Données : Un cristal se développe de manière préférentielle suivant les lignes de plus forte densité de matière. On appelle compacité d’un cristal le rapport du volume occupé par les ions au volume de la maille, exprimé en pourcentage.

Quelques données physico-chimiques : Masse volumique du chlorure de sodium : $\mu = 2163\ kg.m^{-3}$
Rayons ioniques : $r(Na^+) = 97$ pm ; $r(Cl^-) = 181$ pm

Ressource pour le professeur : [annexe 10]:

Activité : Observation de cristaux naturels a l'œil nu, au microscope polarisant

☞ À la découverte du monde minéral et des roches

➔ **Constats :** l'observation du monde qui nous entoure nous permet de constater l'existence d'une diversité de roches, de minéraux/cristaux.
Devant un affleurement de roches, le géologue récolte un maximum de renseignements. Il recueille notamment des informations sur la déformation des roches et sur leur contenu en fossiles. Il étudie aussi la ou les roches présentes et les minéraux qui les constituent. Quelques critères simples permettent de nommer une roche sur le terrain, sans attendre l'étude fine en laboratoire.

➔ **Problématique** : *Quels critères permettent de nommer, classer les roches ?*

Objectifs et travail attendu :

- Observer les roches proposées* (œil nu, loupe binoculaire) ;
- Classer les différentes roches proposées en indiquant clairement les critères retenus ;
- Présenter son travail aux autres groupes.

* Les roches proposées sont : basalte / trachyte ; granite / gabbro ; obsidienne ; ponce ; gneiss ; ardoise ; calcaire lithographique ; calcaire à fossiles ; craie ; sable ; gypse ; sel gemme ; argile ; grès.

Bilan :

Il existe des roches avec cristaux et des roches sans cristaux. Les premières sont des roches d'origine endogène, cristallines ; les deuxièmes sont des roches sédimentaires (formées de débris de roches préexistantes (roches sédimentaires détritiques) ou d'origine biogène ou encore d'origine physico-chimique (roches sédimentaires non détritiques)).

☞ À la découverte de roches cristallines

Exemples : le granite, le basalte, ...

Objectifs et travail attendu :

- Observer, décrire les échantillons à l'œil nu ;
- Observer la lame mince correspondante au microscope polarisant : en lumière polarisée non analysée (LPNA ou lumière naturelle) et en lumière polarisée (LPA) ;
- Identifier les différents minéraux en s'aidant d'une grille de reconnaissance ;
- Réaliser un schéma interprétatif de la lame mince de l'échantillon ou utiliser un logiciel d'acquisition et de traitement d'image (ex. Mesurim) ;
- Conclure.

Bilan :

Le **granite** est une roche entièrement cristallisée (roche à structure grenue). Les minéraux qui le constituent sont : le quartz, les feldspaths (plagioclases et orthose) et les micas (biotite et muscovite).

En complément : le **gabbro**, roche à structure grenue, formée de pyroxènes, feldspaths (plagioclases) et olivine.

Le **basalte** est une roche qui n'est pas entièrement cristallisée : présence de cristaux + une pâte de verre (roche à structure microlitique). Les minéraux peuvent être de grande taille (phénocristaux) ou de petite taille (microlites). Les minéraux qui le constituent sont : pyroxènes (phénocristaux) et olivines, feldspaths plagioclases (microlites).

En complément : le trachyte, la pierre ponce, l'obsidienne.
Le **trachyte** est une roche magmatique volcanique formée de phénocristaux de feldspaths potassiques (sanidine, anorthose, albite) et de microlites (feldspaths + plagioclases + ferro-magnésiens (biotite, amphibole)).
L'**obsidienne** est une roche volcanique vitreuse (riche en Si), pas cristallisée.
La **pierre ponce** est une roche magmatique volcanique poreuse de faible densité. Elle est formée à des hautes températures de l'ordre de 500 à 600°C. La lave projetée en l'air se refroidit très vite et la chute de pression entraine un dégazage qui forme des bulles d'où la porosité et la faible densité. Pas de structure cristalline : c'est un verre.

Activité 11 : Formation et croissance de cristaux

☞ Comparaison des roches cristallines et recherches d'explications

Objectifs et travail attendu :

- Comparer granite / basalte (et/ou autres roches vues lors de l'activité précédente).
  Formuler des constats, problèmes et hypothèses ;
- Chercher un/des protocole(s) pour tester la/les hypothèse(s) ;
- Mettre en œuvre son/ses protocole(s) et observer les résultats obtenus ;
- Valider ou non la/les hypothèse(s) ;
- Conclure en répondant aux problèmes posés.

Bilan :

➔ **Constats :**
- ×Ces (deux) roches sont formées de minéraux.
- ×Elles ne sont pas formées des mêmes minéraux.
- ×Tous les minéraux n'ont pas la même taille : il y en a des grands, des petits.

➔ **Problèmes :**
- ×D'où proviennent ces minéraux ? Comment se forme un minéral ?
- ×Comment expliquer la différence de taille entre ces minéraux ?
- ×...

Aide : projeter diapos sur pillow-lavas (lame mince de couche superficielle : petits cristaux ; lame mince de l'intérieur du pillow : cristaux de taille plus grande).

- **Hypothèses** : propositions élèves
  - H1 : le refroidissement d'un magma est responsable de l'apparition de cristaux.
  - H2 : la vitesse de refroidissement est responsable de la taille des cristaux.
- **Protocole(s)** : je trouve un/des protocoles pour tester ma/mes hypothèse(s) en utilisant le matériel suivant :
  - de la vanilline de synthèse
  - un scalpel
  - des lames / lamelles
  - un bec électrique ou des bougies chauffe-plat
  - des pinces en bois
  - de la glace (ou congélateur)
  - une étuve (50°C)
  - des boîtes de Pétri
  - un microscope optique équipé d'un dispositif de polarisation (+ webcam et logiciel Mesurim)

- **Règles de bonnes pratiques**

La distribution du produit reste sous le contrôle de l'enseignant, c'est lui qui distribue à chaque élève la quantité nécessaire à l'expérience en lui indiquant les précautions d'utilisation. Pour réaliser une cristallisation, une très faible quantité suffit. Elle est déposée par l'enseignant sur une lame directement recouverte d'une lamelle avec chauffage contrôlé à l'aide d'une source de chaleur limitée (fusion obtenue dès 82°C, pas de contact direct du produit avec une flamme nue). En effet, en cas de combustion ou de pyrolyse, des gaz ou des vapeurs dangereuses peuvent se former.

Aérer la salle pendant et après le TP.

Éviter tout contact (peau, muqueuses, yeux), ne pas inhaler.

Il peut y avoir parfois des problèmes d'asthme.

Un petit truc permet de sceller des lames de vanilline et de les chauffer puis refroidir sans risques : utiliser un système de scellement qui résiste à la chaleur :

- On prépare d'abord une lame avec une pointe de vanilline, une lamelle et on chauffe.
- Après refroidissement et cristallisation, la lamelle est scellée sur la lame avec du ruban adhésif métallisé utilisé par les chauffagistes pour l'étanchéité des conduits de cheminée.
- Avantages :
  l'adhésif résiste à la chaleur et la lame peut donc être réchauffée de multiples fois sur une bougie
  l'adhésif est étanche, donc plus de vapeurs inhalées et on peut la plonger dans de l'eau avec des glaçons.

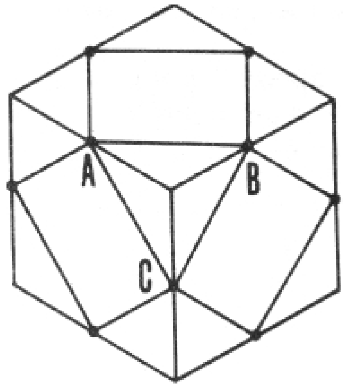
- **Mise en œuvre des protocoles et observation des résultats :**
  - Vanilline fondue et refroidie à différentes températures.
    On pourra donner à l'élève en difficulté un document de secours qui indique les différentes étapes à suivre (protocole classique de cristallisation de la vanilline disponible facilement sur de nombreux sites de SVT).
    L'observation au microscope optique polarisant pourra être accompagnée d'une capture d'images puis suivie du traitement des images obtenues grâce au logiciel Mesurim.
    Ions en solution : sulfate de cuivre et chlorure de sodium dans des boîtes de Pétri mis à des températures différentes
- Valider ou non les hypothèses ; conclure en répondant aux problèmes soulevés.

Annexe 1 : Observation de cristaux et constructions de polyèdres

☞ Observation et dessins de différents cristaux ; mise en évidence des propriétés géométriques des cristaux…

☞ Articulation avec les mathématiques : étude de quelques cubes tronqués…

Le cube-octaèdre d'Archimède

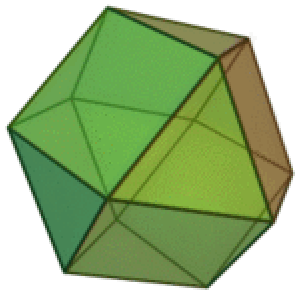


Imaginons un cube en bois, ou de polystyrène sur lequel on marque le milieu des arêtes, (par exemple, comme les trois points A, B et C du cube ci-contre où seules ses faces visibles sont représentées). Ensuite, on découpe d'un trait de scie un morceau tétraédrique à chaque coin du cube, chaque trait de scie passant par trois milieux (ainsi, par exemple, on donne un trait de scie suivant ABC).

Le solide qui reste après ce découpage s'appelle le ***"cube-octaèdre d'Archimède"***

Voir le fichier cristallographie1a_math.g3w dans l'archive cristallo-geometrie.zip

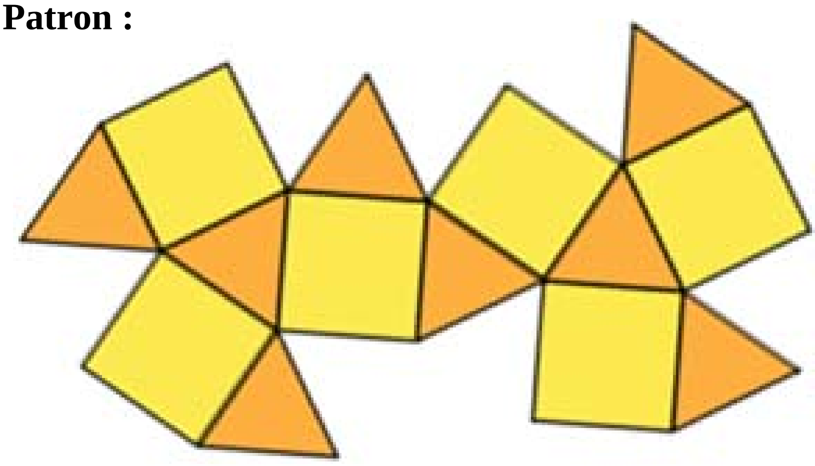
☞ *Fabriquer par découpage, pliage et collage un cube octaèdre d'Archimède en partant d'un cube de 8 cm d'arête.*



Le **cube octaèdre** est un polyèdre à 14 faces régulières, dont huit sont des triangles équilatéraux et six sont des carrés. Il comporte

- 12 sommets identiques, chacun joignant deux triangles et deux carrés opposés deux à deux ;
- 24 arrêtes identiques, chacune commune à un triangle et un carré.

Patron :



Si k est la longueur du côté du cube de départ (circonscrit au *cube-octaèdre d'Archimède*), alors chaque morceau tétraédrique de coin a pour volume $\frac{k^3}{48}$ et donc le volume du *cube-octaèdre d'Archimède* vaut : $k^3 - 8 \times \frac{k^3}{48} = \frac{5}{6}k^3$

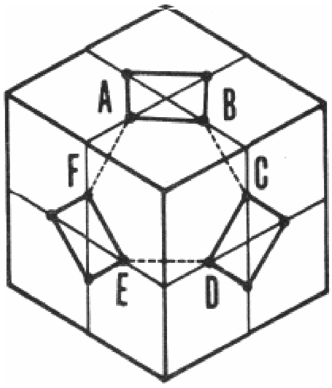
Or $a = \frac{k}{2}\sqrt{2}$, d'où $k = a\sqrt{2}$.

*L'**aire** A et le **volume** V d'un cube-octaèdre d'Archimède de côté a sont donnés par :*

$$A = \left(6 + 2\sqrt{3}\right)a^2 \text{ et } V = \frac{5\sqrt{2}}{3}a^3$$

Le volume du cube-octaèdre d'Archimède est $\frac{5}{6}$ du cube circonscrit [et $\frac{5}{8}$ de l'octaèdre circonscrit].

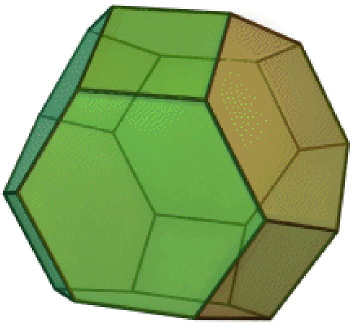
Le "polyèdre de lord Kelvin"



Ce polyèdre peut s'obtenir comme le cube-octaèdre d'Archimède mais ici, on scie selon des sections passant par des points situés aux quarts des médiatrices des faces, comme A, B, C, D, E, F.

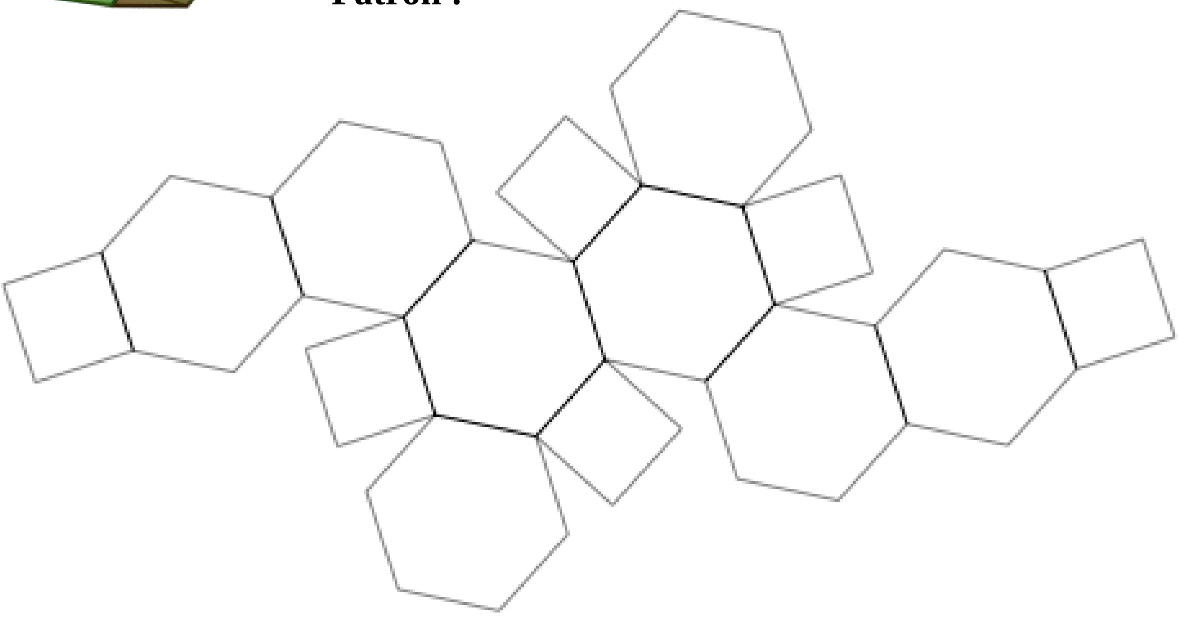
☞ **Fabriquer par découpage, pliage et collage un polyèdre de lord Kelvin** ***en partant d'un cube de 8 cm d'arête.***

Voir fichier cristallographie1b_math.g3wdans l'archive cristallo-geometrie.zip séparée.



Le **polyèdre de Lord Kelvin** possède 8 faces hexagonales régulières, 6 faces carrés régulières, 24 sommets et 36 arêtes. Chacune de ses faces possède un centre de symétrie.

Patron :



☞ **En utilisant plusieurs polyèdres de Lord Kelvin, trouver comment ces polyèdres "pavent" l'espace [*ceci signifie que l'espace peut être rempli par des polyèdres de lord Kelvin de mêmes dimensions, accolés les uns aux autres sans qu'il subsiste de trou*].**

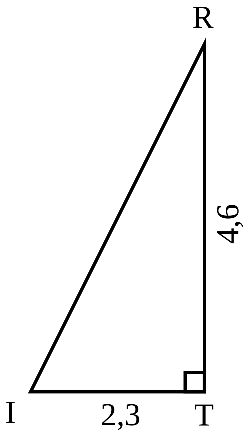
Les **polyèdre de Lord Kelvin** sont capables de paver l'espace, en formant un nid d'abeille uniforme convexe.

Annexe 2 : Des rhomboèdres tronqués...

☞ ***Construire un rhomboèdre*** **dont chaque face est construite selon le modèle qui suit :**

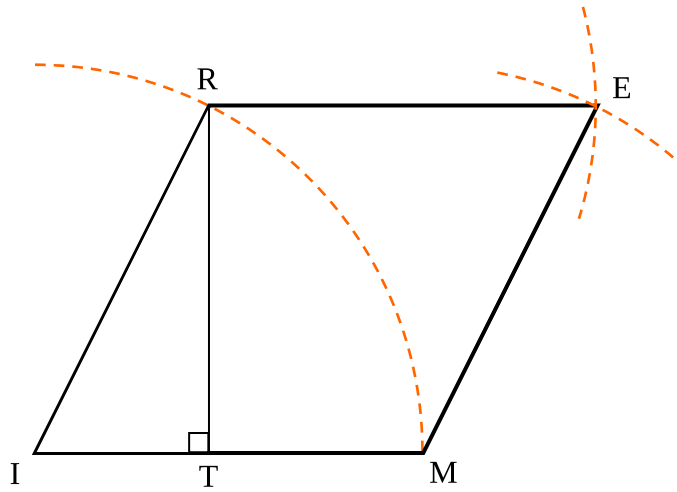
❖ **Tracer un triangle TRI rectangle en T tel que TI = 2,3 cm et la tangente de l'angle $\widehat{RIT}$ est égale à 2.**

❖ **Construire le losange MIRE tel que les points M, T, I soient alignés.**



1° On part donc d'un triangle TRI rectangle en T tel que TI = 2,3 cm et TR = 4,6 cm.

On obtient bien un triangle TRI rectangle en T tel que $\tan \widehat{RIT} = 2$.



2° On complète la construction précédente au compas de façon à obtenir le losange MIRE tel que les points M, T, I soient alignés.

En fait il y a deux rhomboèdres possibles, ***un rhomboèdre "aigu" et un rhomboèdre "obtus"*** qui ont pour faces six mêmes losanges tous identiques à celui construit ci-dessus...

↳ **Patrons de ces rhomboèdres : Rhomboèdre obtus.doc et Rhomboèdre obtus.doc**

Quelques calculs en bonus et une surprise à l'arrivée...

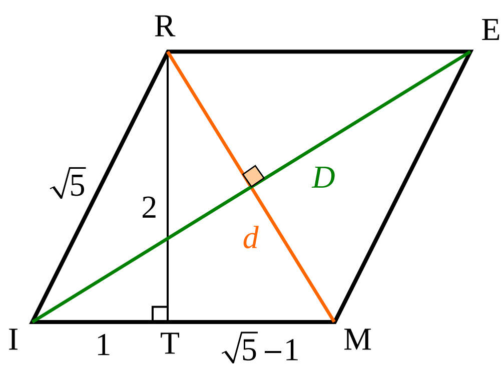
Longueur d de la petite diagonale d'un losange de base :

$$d^2 = 2^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^2 = 10 - 2\sqrt{5}\text{, d'où : } d = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Longueur D de la grande diagonale d'un losange de base :

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow d^2 + D^2 = 20 \Leftrightarrow D^2 = 20 - \left(10 - 2\sqrt{5}\right),$$

$$\text{d'où : } D = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

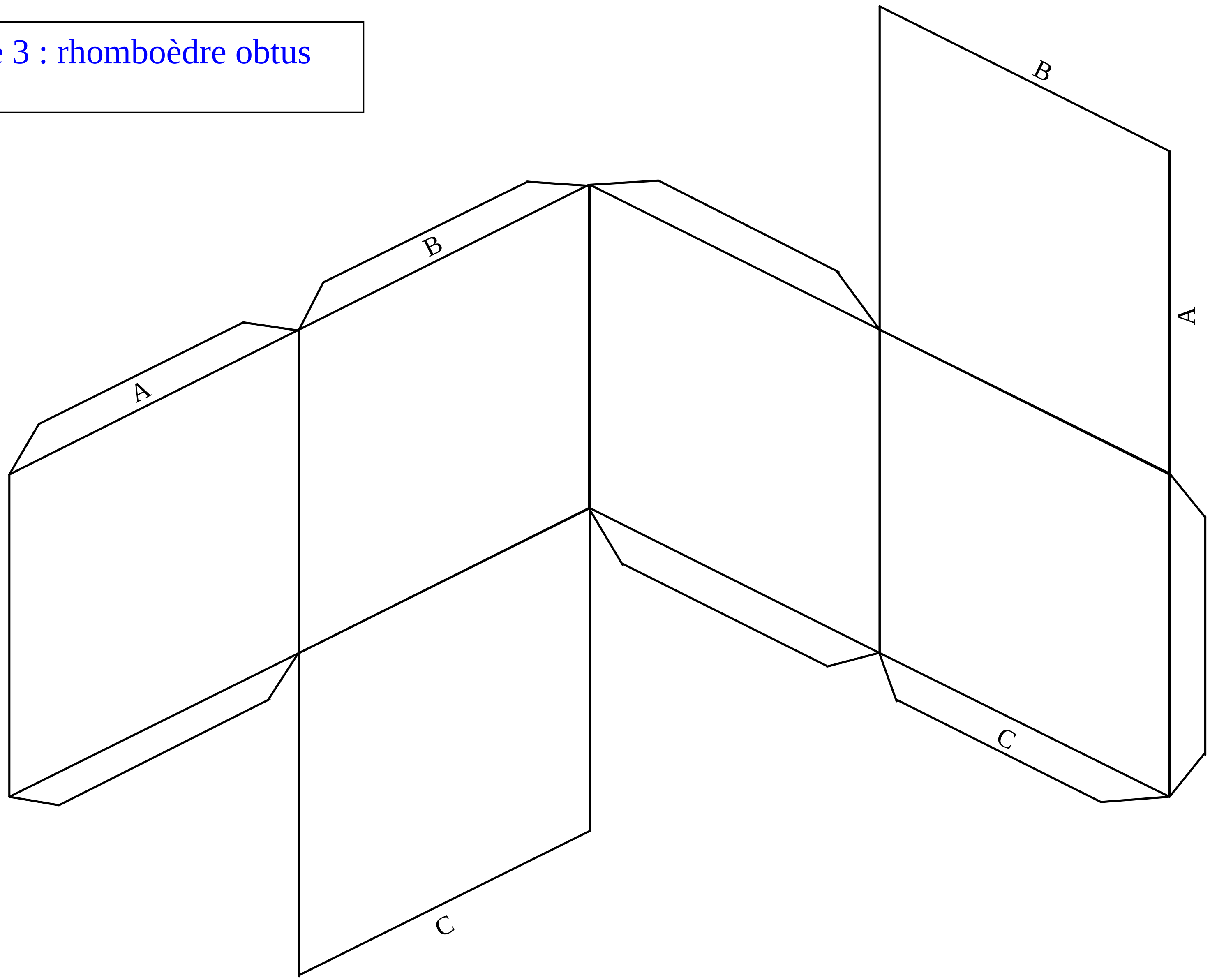


Rapport :

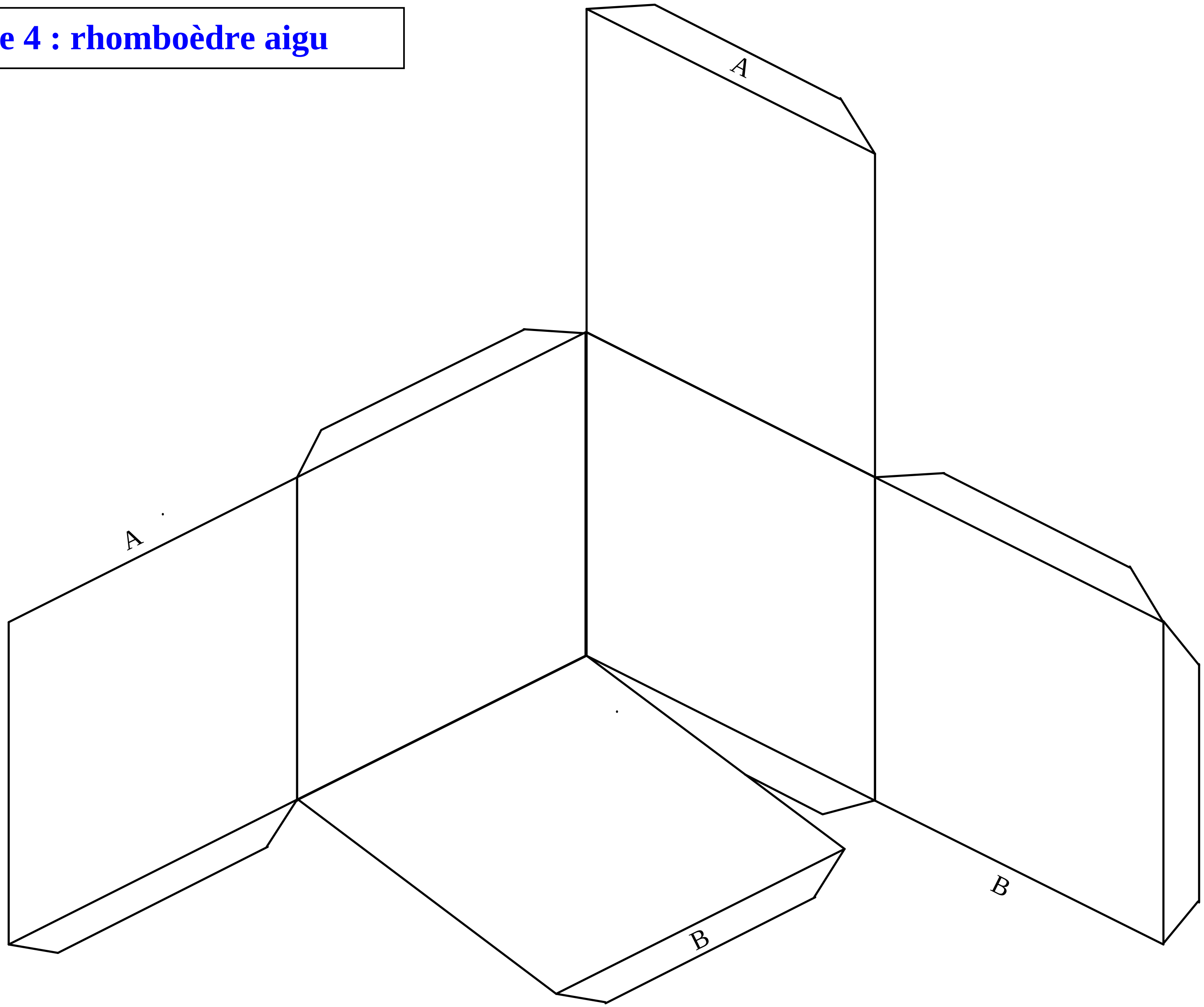
$$\frac{D}{d} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)^2}{100-20}} = \sqrt{\frac{120+40\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{40\left(3+\sqrt{5}\right)}{80}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Or le carré du **nombre d'or** $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ vaut $\phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$, d'où : $\frac{D}{d} = \sqrt{\phi^2} = \phi$!

Annexe 3 : rhomboèdre obtus



Annexe 4 : rhomboèdre aigu



Annexe 5 : Cristallographie avec des cubes

Les cristaux : étude d'un "modèle"

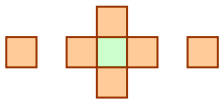
Le "**polyèdre limite**" est un octaèdre. Au centre des six cubes extrêmes, en plaçant un bâtonnet de 2cm de haut et en reliant le sommet de ces six bâtonnets on obtient un octaèdre "fil de fer".

	Nombre de cubes	Différence
Étape 0	1	
Étape 1	7	+ 6
Étape 2	25	+18
Étape 3	63	+ 38

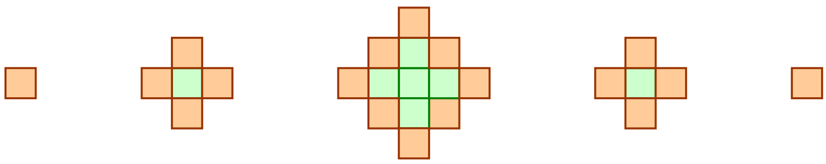
Exemple de stratégie "gagnante" en raisonnant par "tranches"… Ainsi :

☞ à l'**étape 0**, il n'y a qu'une tranche de 1 cube 

☞ à l'**étape 1**, il y a 3 tranches : deux de 1 cube et une "tranche centrale" de 5 cubes

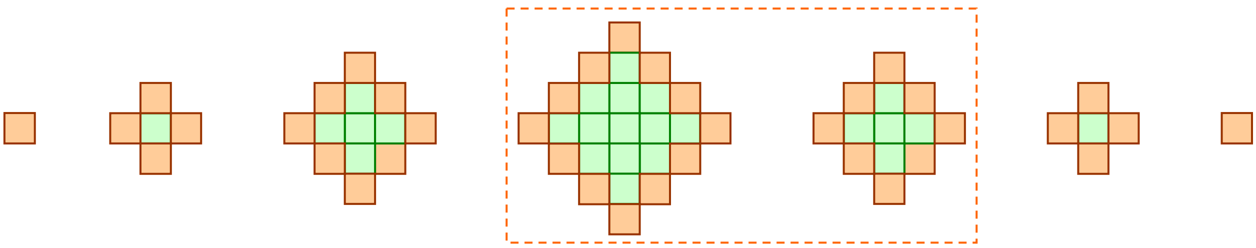


☞ à l'**étape 2**, il y a 5 tranches : deux de 1 cube, deux de 5 cubes et une "tranche centrale" de 13 cubes



1   1 + 3 + 1   1 + 3 + 5 + 3 + 1   1 + 3 + 1   1

☞ à l'**étape 3**, il y a 7 tranches : deux de 1 cube, deux de 5 cubes, deux de 13 cubes et une "tranche centrale" de 25 cubes



1   1 + 3 + 1   1 + 3 + 5 +3 + 1   1 + 3 + 5 + 3 + 1   1 + 3 + 1   1

1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1

Etc. avec deux tranches supplémentaires à chaque étape…

On peut donc remarquer qu'à chaque étape on rajoute la "tranche centrale" de l'étape précédente en plus d'une nouvelle "tranche centrale".

Généralisation...

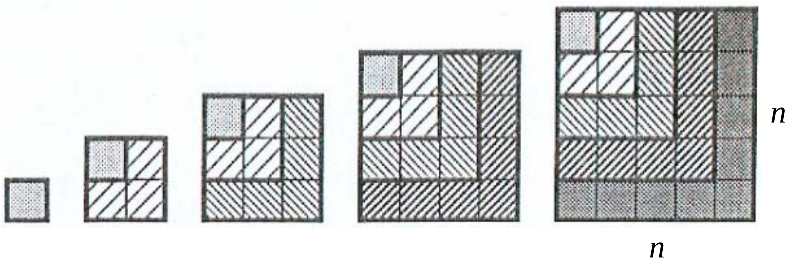
On peut tenter fabriquer au fur et à mesure les cubes nécessaires… mais il semble plus raisonnable de trouver un procédé répétitif permettant de compter les cubes d'une étape à l'autre... Selon le procédé utilisé, les élèves seront amenés à devoir savoir additionner une suite de nombres impairs d'une longueur quelconque.

Questions préliminaires susceptibles d'être posées pour leur venir en aide :

a) Quel est le 1er nombre pair ? le 34ème ? le 2010ème ? le $n^{ième}$?

b) Mêmes questions pour les nombres impairs : quel est le 1er nombre impair ? le 34ème ? le 2010ème ? le $n^{ième}$?

c) Observez maintenant les petits puzzles ci-contre et déduisez-en une propriété très intéressante concernant la somme I_n des n premiers nombres impairs ! (une fois conjecturée, vous admettrez cette propriété)



Remarque préliminaire : il va de soi que les indications qui sont données ci-après le sont sous une forme qui n'est pas celle que des élèves de seconde ont pu utiliser...

Des puzzles, on peut conjecturer, **et on l'admettra**, que la somme I_n des n premiers entiers impairs est égale à : $\mathrm{I}_n = 1+3+5+\cdots \quad \cdots+2n+1 = n^2$

On a donc :

$$\mathrm{N}_0 = 1$$

$$\mathrm{N}_1 = 2+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_1 = 2+2^2+1 = 7$$

$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_1+\left(\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_1\right)+\left(\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_2\right) = 7+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+2^2\right) = 25$$

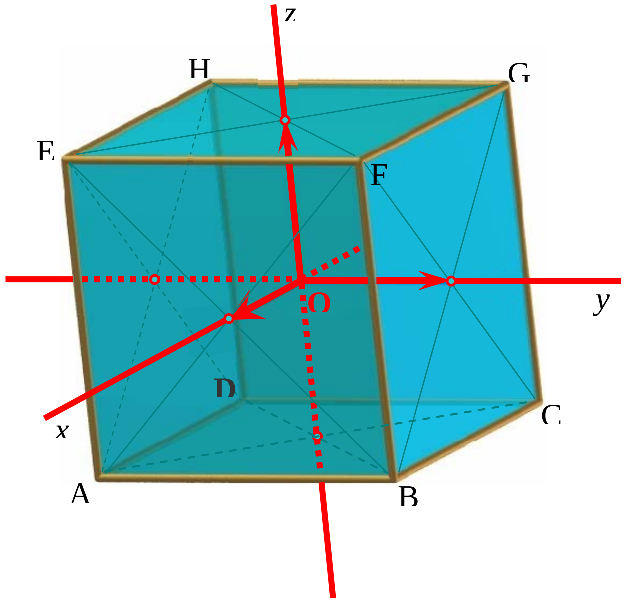
$$\mathrm{N}_3 = \mathrm{N}_2+\left(\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_2\right)+\left(\mathrm{I}_4+\mathrm{I}_3\right) = 25+\left(3^2+2^2\right)+\left(4^2+3^2\right) = 25+13+25 = 63$$

… / …

$$\mathrm{N}_n = \mathrm{N}_{n-1}+\left(\mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n-1}\right)+\left(\mathrm{I}_{n+1}+\mathrm{I}_n\right) = \mathrm{N}_{n-1}+\left(n^2+(n-1)^2\right)+\left((n+1)^2+n^2\right) = \mathrm{N}_{n-1}+4n^2+2$$

Complément : Construction du cristal de l'étape 1 avec GEOSPACE

Repérage dans l'espace :
Considérons un cube ABCDEFGH dont la longueur des arêtes est égale à 2 unités. Pour effectuer un repérage dans l'espace il faut se donner une origine et trois directions distinctes deux à deux. Par exemple, prenons comme origine O le centre du cube et comme premier axe la droite (O*x*) passant par les centres des faces ABFE et DCGH (et donc perpendiculaire à ces faces), comme deuxième axe la droite (O*y*) passant par les centres des faces BCGF et ADHE (et donc perpendiculaire à ces faces) et comme troisième axe la droite (Oz) passant par les centres des faces ABCD et EFGH (et donc perpendiculaire à ces faces). Prenons comme unité sur chacun de ces axes la moitié de la longueur d'une arête (autrement dit les arêtes de ce cube ont pour longueur 2 unités).



Question : justifiez qu'un tel repère est *orthonormé*.

Indications pour le professeur

Un point est alors repéré par un triplet de nombres (*a* ; *b* ; *c*) qui sont qui sont ses coordonnées dans le repère (O ; (O*x*), (O*y*), (O*z*)).

Définitions : la 1$^{\text{ère}}$ coordonnée *a* est l'*abscisse* du point
la 2$^{\text{ème}}$ coordonnée *b* est l'*ordonnée* du point
la 3$^{\text{ème}}$ coordonnée *c* est la *cote* du point.

Questions :

1° Indiquez les coordonnées des sommets du cube.

2° Ouvrez le logiciel **Geospace** puis "*créez*" les 8 sommets par leurs coordonnées.

3° Construire les 6 cubes permettant d'obtenir le cristal de l'étape 1…

4° Trouvez comment faire apparaître le "**polyèdre limite**" à l'étape 1…

L'origine O du repère étant le centre du premier cube, d'arête 2, ses sommets ont pour coordonnées :

- A(1, –1, –1), B(1, 1 –1), C(–1, 1, –1), D(–1, –1, –1) pour les sommets du "dessous",
- E(1, –1, 1), F(1, 1, 1), G(–1, 1, 1), H(–1, –1, 1) pour les sommets "du dessus"...

[créer ⇘ point ⇘ point repéré ⇘ dans l'espace] permet de placer les sommets.

Ensuite on construit les 6 cubes en faisant des symétries par rapport aux faces du cube initial (Symétrie par rapport à un plan) ce qui devrait être à la portée des élèves si on les "épaule" un peu (la difficulté étant de devoir créer la transformation avant de pouvoir l'utiliser)… puis ils auront à déterminer les coordonnées des centres des faces des 6 cubes visibles puis celles du sommet de chaque bâtonnet, etc. Cela nous a semblé une bonne motivation pour travailler des coordonnées dans l'espace. Ensuite on fait tracer le "**polyèdre limite**" (c'est à dire l'**octaèdre**)...

Voir fichier cristal cubes.g3w dans l'archive cristallo-geometrie.zip

Pour faire apparaître un à un les cubes et les bâtonnets :

☞ appuyer sur la touche C qui fera apparaître les 6 cubes l'un après l'autre ;

☞ appuyer sur la touche P pour faire apparaître les bâtonnets puis l'octaèdre.

Calcul de volume et d'aires...

a) Calcul du volume du "*cristal*" ainsi que de celui du "*polyèdre limite*", puis calcul sous forme d'un pourcentage (arrondi au centième le plus proche) de la densité de l'empilement des cubes du "*cristal*" par rapport au volume du "*polyèdre limite*".

b) Calcul de l'aire latérale du "*cristal*" (l'aire des faces visibles) ainsi que de celle du "*polyèdre limite*", puis calcul sous forme d'un pourcentage (arrondi au centième le plus proche) du rapport de ces aires.

On peut commencer par effectuer ces calculs pour l'**étape 0**, l'**étape 1,** l'**étape 2** et l'**étape 3** puis passer à la **généralisation** c'est à dire à l'**étape *n***.

En ayant recours à un tableur on peut, par exemple, effectuer les calculs jusqu'à l'étape 50, puis jusqu'à l'étape 500, puis 1000, puis 10000… et effectuer des conjectures concernant le volume du "*cristal*" par rapport au volume du "*polyèdre limite*" ainsi que concernant l'aire latérale du "*cristal*" et elle du "*polyèdre limite*" (fait-on pour les aires une conjecture similaire à celles faite sur les volumes par exemple ?)

Voit fichiers « volume-octaedre.xls » et « volume-octaedre.ods » dans l'annexe « cristallo-tableur.zip ».

En utilisant un tableur (voir ci-dessous), on peut facilement conjecturer que le volume du cristal tend à devenir égal à celui de l'octaèdre.

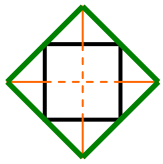
Arête du cube 4

n	Nbre de cubes	Volume du cristal	Volume de l'octaèdre	Vc/Vo en %
0	1	64	85,33333333	75,00
1	7	448	682,6666667	65,63
2	25	1600	2304	69,44
3	63	4032	5461,333333	73,83
4	129	8256	10666,66667	77,40
5	231	14784	18432	80,21
6	377	24128	29269,33333	82,43
7	575	36800	43690,66667	84,23
8	833	53312	62208	85,70
9	1159	74176	85333,33333	86,93
10	1561	99904	113578,6667	87,96
11	2047	131008	147456	88,85
12	2625	168000	187477,3333	89,61
13	3303	211392	234154,6667	90,28
14	4089	261696	288000	90,87
15	4991	319424	349525,3333	91,39
35	59711	3821504	3981312	95,99
36	64897	4153408	4322389,333	96,09
37	70375	4504000	4682410,667	96,19
38	76153	4873792	5061888	96,28
39	82239	5263296	5461333,333	96,37
40	88641	5673024	5881258,667	96,46
41	95367	6103488	6322176	96,54
42	102425	6555200	6784597,333	96,62
43	109823	7028672	7269034,667	96,69
44	117569	7524416	7776000	96,76
45	125671	8042944	8306005,333	96,83
46	134137	8584768	8859562,667	96,90
47	142975	9150400	9437184	96,96
48	152193	9740352	10039381,33	97,02
49	161799	10355136	10666666,67	97,08
50	171801	10995264	11319552	97,14
500	**167168001**	**10698752064**	**10730794752**	**99,70**
1000	**1335336001**	**85461504064**	**85589589419**	**99,85**
10000	**1,33353E+12**	**8,53461E+13**	**8,53589E+13**	**99,99**

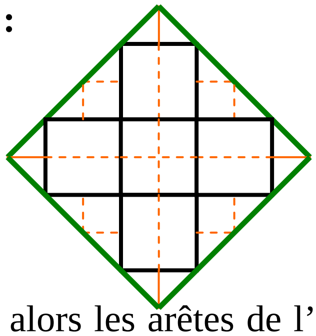
Aire du *cristal* et de l'octaèdre

Vue en coupe (ou vue de dessus) du *cristal* et de l'octaèdre associé :

À l'étape 0 :



À l'étape 1 :



Si a représente la longueur des arêtes d'un cube, alors les arêtes de l'octaèdre à l'étape n ont pour longueur $(n+1)a\sqrt{2}$.

Toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux d'aire $Ao_n = \frac{1}{2}(n+1)a\sqrt{2}\times\left((n+1)a\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = (n+1)^2 a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc l'aire de l'octaèdre est égale à $4(n+1)^2 a^2\sqrt{3}$. ⇨ Avec $a=4$: $Ao_n = 4^3(n+1)^2\sqrt{3} = 64(n+1)^2\sqrt{3}$

L'aire du cristal est égale à 6 fois l'aire de la tranche centrale constituée de T_n carrés de côté a, avec $T_n = I_{n+1} + I_n = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$, d'où laire du cristal à l'étape n : $Ac_n = 6\left(2n^2+2n+1\right)a^2$. ⇨ Avec $a=4$: $Ac_n = 96\left(2n^2+2n+1\right)$

n	Nombre de cubes	Aire du cristal en cm^2	arête de l'octaèdre en cm	Aire de l'octaèdre en cm^2	Ac_n / Ao_n
0	**1**	$Ac_0 = 6a^2 = 96$	$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$	$Ao_0 = 64\sqrt{3}$ $\approx 110,85$	$\approx 0,87$
1	**7**	$Ac_1 = 30a^3 = 480$	$2a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$	$Ao_1 = 16a^3\sqrt{3} = 256\sqrt{3}$ $\approx 443,41$	$\approx 1,08$
2	**25**	$Ac_2 = 78a^2 = 1248$	$3a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$	$Ao_2 = 36a^2\sqrt{3} = 576\sqrt{3}$ $\approx 997,66$	$\approx 1,25$
3	**63**	$Ac_3 = 150a^2 = 2400$	$4a\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$	$Ao_3 = 64a^2\sqrt{3} = 1024\sqrt{3}$ $\approx 1773,62$	$\approx 1,35$
4	**129**	$Ac_4 = 246a^3 = 3936$	$5a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$	$Ao_4 = 100a^2\sqrt{3} = 1600\sqrt{3}$ $\approx 2771,28$	$\approx 1,42$

$$Ac_n / Ao_n = \frac{96\left(2n^2+2n+1\right)}{64(n+1)^2\sqrt{3}} = \frac{192n^2+192n+96}{64n^2\sqrt{3}+128n\sqrt{3}+64\sqrt{3}}$$

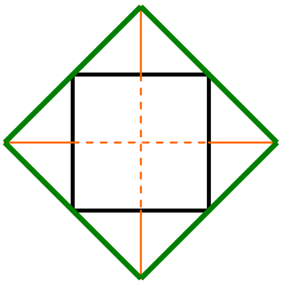
D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} Ac_n / Ao_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{192n^2}{64n^2\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,732$

L'aire du cristal tend donc à devenir environ égale aux 7/4 de celle de l'octaèdre.
[L'aire de l'octaèdre tend à devenir environ égale 4/7 ou encore à un peu plus de la moitié de celle du cristal]

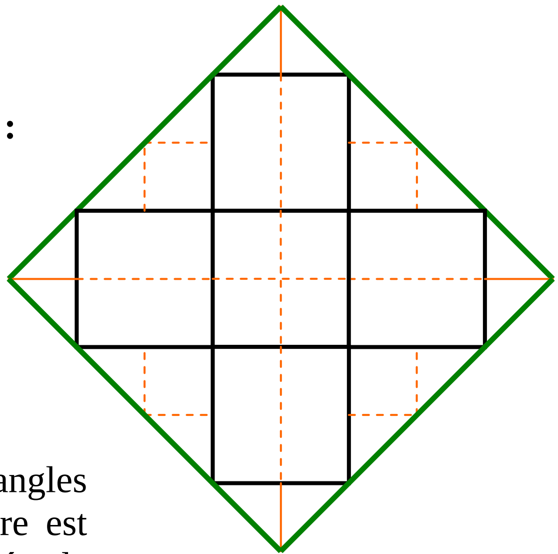
Volume du cristal et de l'octaèdre

Vue en coupe (ou vue de dessus) du cristal et de l'octaèdre associé :

À l'étape 0 :



À l'étape 1 :



Si a représente la longueur des arêtes d'un cube, alors les arêtes de l'octaèdre à l'étape n ont pour longueur $(n+1)a\sqrt{2}$.

Toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux et on peut considérer que l'octaèdre est donc composé de deux pyramides à base carrée de hauteur égale à $(n+1)\times a$.

D'où le volume de l'octaèdre à l'étape n : $Vo_n = 2\times\frac{1}{3}\left((n+1)a\sqrt{2}\right)^3\times(n+1)a = \frac{4}{3}(n+1)^3a^3$

➯ avec $a=4$: $Vo_n = \frac{4^4}{3}(n+1)^3 = \frac{256}{3}(n+1)^3$

Remarque :

Le volume d'un octaèdre régulier est égal à $\frac{\sqrt{2}}{3}\times c^3$ où c est la longueur de ses arêtes.

On a bien ici : $\frac{\sqrt{2}}{3}\times c^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\times\left((n+1)a\sqrt{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\times(n+1)^3a^3\times 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}(n+1)^3a^3\ldots$

n	**Nombre de cubes**	**Volume du cristal en cm³**	**arête de l'octaèdre en cm**	**Volume de l'octaèdre en cm³**	Vc_n / Vo_n
0	**1**	$Vc_0 = a^3 = 4^3 = 64$	$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$	$Vo_0 = \frac{4}{3}a^3$ $\approx 85{,}333$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$
1	**7**	$Vc_1 = 7a^3 = 448$	$2a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$	$Vo_1 = \frac{32}{3}a^3$ $\approx 682{,}667$	$\frac{21}{32} = 0{,}65625$
2	**25**	$Vc_2 = 25a^3 = 1600$	$3a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$	$Vo_2 = 36a^3$ $= 2304$	$\frac{25}{36} \approx 0{,}694$
3	**63**	$Vc_3 = 63a^3 = 4032$	$4a\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$	$Vo_3 = \frac{256}{3}a^3$ $\approx 5461{,}333$	$\frac{189}{256} \approx 0{,}738$
4	**129**	$Vc_4 = 129a^3 = 8256$	$5a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$	$Vo_3 = \frac{500}{3}a^3$ $\approx 10666{,}667$	$\frac{387}{500} = 0{,}774$

Annexe 6 : Empilements de sphères

Avec des boulets de canon...

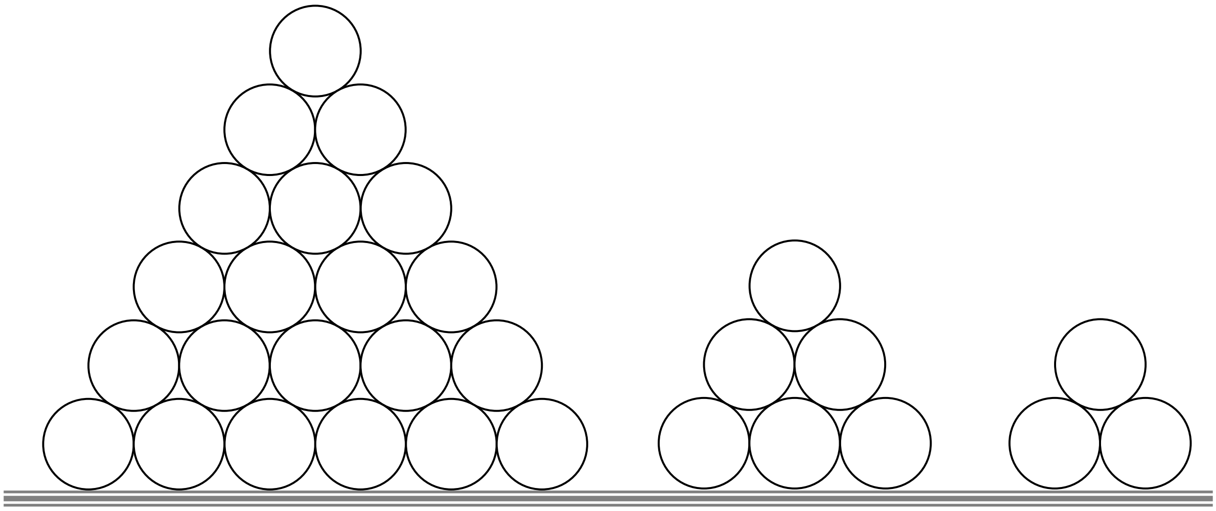
Devant des musées, en guise de décoration, on trouve parfois des pyramides à base carrée comme ci-contre (souvent à côté de canons).

- Nombre de boulets pour construire une telle pyramide ?
- En utilisant l'intégralité des boulets de deux pyramides identiques à celle représentée ci-dessus, examinez s'il est possible d'obtenir :
  - deux pyramides à base carrée de tailles différentes ;
  - trois pyramides à base carrée…
- **Nombre pyramidal :** c'est un nombre qui est représenté par une pyramide dont la base est un polygone régulier. Ainsi 1, 5, 14, 55 et 91 sont des nombres pyramidaux à base carrée que l'on appellera plus simplement nombres pyramidaux carrés.
  - Déterminez les 15 premiers nombres pyramidaux carrés.
  - Établissez quelques propriétés de ces nombres…
- En considérant que ces boulets sont bien sphériques et sachant que leur diamètre vaut 12 cm, quelle peut bien être la hauteur d'une telle pyramide (au mm près) ? Généralisation ?

Indications pour le professeur

Nombre de boulets : $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = \mathbf{55}$

En utilisant l'intégralité de 110 boulets, il n'est pas possible d'obtenir deux pyramides à base carrée de tailles différentes ; en effet : 36 + 55 = 91 mais 110 – 91 = 19 et il n'existe pas de pyramide à base carrée utilisant 19 boulets… Par contre il est possible d'obtenir trois pyramides à base carrée de tailles différentes car : 110 = 91 + 14 + 5



Nombres pyramidaux :

a) **1**, **5**, **14**, **30**, 55, **91**, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015 et 1240.

b) Le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal carré est égal au cumul des carrés des n premiers entiers, c'est à dire à la somme des carrés des n premiers entiers successifs (autre que 0) ; par exemple :

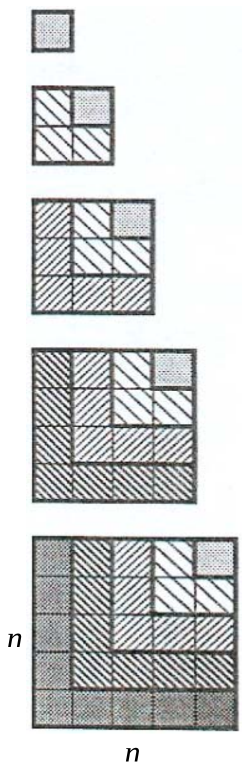
$$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$$

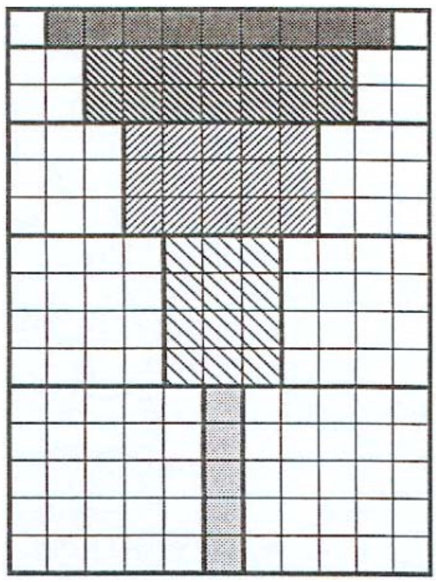
c) Le $n^{\text{ième}}$ de ces nombres est égal à son prédécesseur, le $(n-1)^{\text{ième}}$, plus le carré du $n^{\text{ième}}$ nombre entier non nul ; par exemple, le $4^{\text{ème}}$ de ces nombres est 30 et on a bien : $30 = 14 + 4^2 = 14 + 16$.

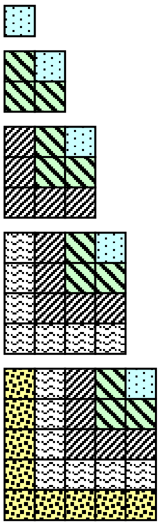
Conjecture admise : $\mathbf{Pycar_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}$

Indications pour les élèves voulant aller "plus loin" :

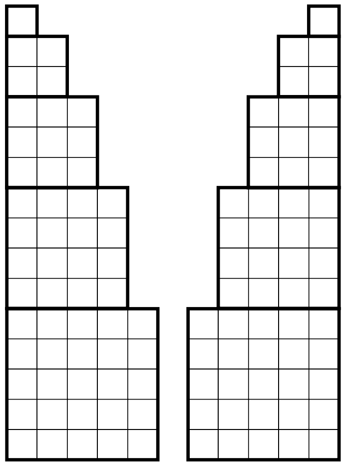
Examinez à nouveau les puzzle utilisé dans le document **cristallographie5_math.doc** ainsi que le nouveau puzzle ci-contre… ils devraient à eux deux vous aider à déterminer une formule permettant de **déterminer le *n*ième nombre pyramidal carré en fonction de *n*…**







Clé pour comprendre le puzzle et sans doute donner un coup de main aux élèves qui n'auraient pas une aussi “bonne vue” que l'auteur du puzzle…



Les 5 carrés en couleur sur le côté se retrouvent à deux endroits, tels quels, dans le rectangle : “colonne” de droite et “colonne” de gauche (cf. ci-contre).

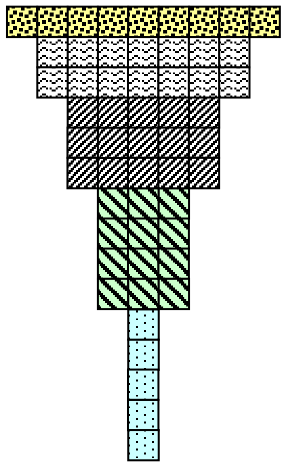
On les retrouve encore une fois “colonne centrale”, en effet avec ces 5 carrés on a : 1 fois 9,

2 fois 7,

3 fois 5,

4 fois 3,

5 fois 1

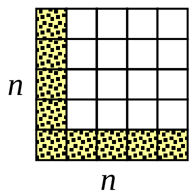


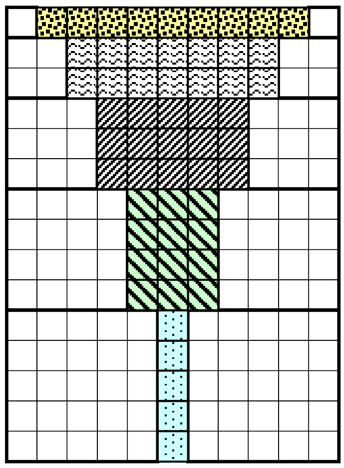
En les empilant ainsi, on obtient bien la “pyramide centrale (cf. ci-contre)…

Le rectangle est donc constitué de 3 fois les carrés sur le côté et donc on a :

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{(9+2)\times(1+2+3+4+5)}{3}$$

$$=\frac{11\times 15}{3}=55$$





Et ce procédé est parfaitement généralisable :

Avec n carrés, le dernier ayant comme côté n, les carrés en couleur représenteront le nombre impair $n+n-1$, c'est-à-dire $2n-1$, le rang supérieur représentant $2n-3$, etc. et on aura :

1 fois $2n-1$,

2 fois $(2n-3)$,

--- / ---

$(n-2)$ fois 5,

$(n-1)$ fois 3,

n fois 1

d'où :

$$1^2+2^2+3^2+\quad\cdots\quad+n^2=\frac{(2n-1+2)\times(1+2+3+\cdots+n)}{3}=\frac{(2n+1)\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✎ vérification pour $n = 1$, $n = 2$, etc.

Et pour $n = 2010$, **Pycar**$_{2010}$ $=\dfrac{2010\times 2011\times 4021}{6}=2\,708\,887\,385.$

Hauteur d'une pyramide à base carrée...

Étape 1 : 1 boulet et la hauteur de la pyramide vaut 12 cm.

Étape 2 : 1 + 2² = 5 billes et $\ell_2 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ et $(h_2)^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 = 72 = 36 \times 2$, d'où $h_2 = 6\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide est donc $H_2 = 6\sqrt{2} + 12$ soit environ 20,49 cm.

Étape 5 : 55 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 ; la base de la pyramide est donc constituée de 25 boulets et a 5 “étages” avec 4 ***faces latérales***

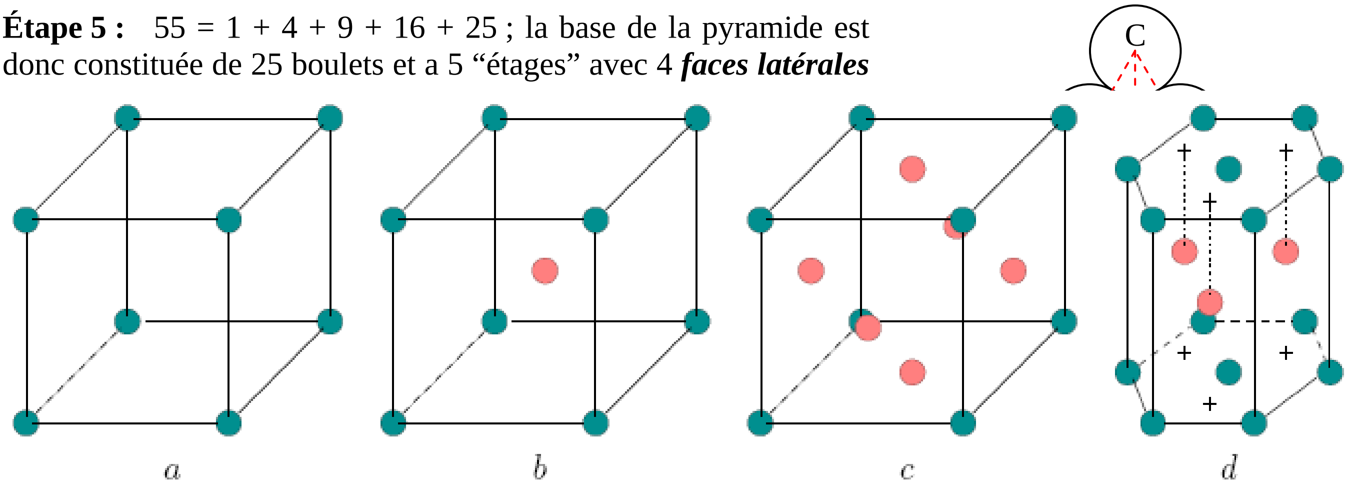
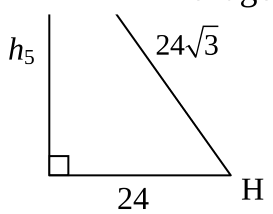


Figure 1 : empilements cubique simple (a), cubique centré (b), cubique à faces centrées (c), hexagonal compact (d).



comme ci-contre…
Considérons le triangle ABC obtenu en joignant les centres des boulets aux “extrémités” : ce triangle est équilatéral de côté 4 diamètres c'est-à-dire 48 cm et donc la hauteur CH vaut :

$$\ell_5 = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}$$

Considérons maintenant la pyramide en coupe comme ci-dessous (le plan de coupe est le plan perpendiculaire à la base passant par les points C et H) :

On a : $(h_5)^2 = (24\sqrt{3})^2 - 24^2 = 1728 - 576 = 1152 = 3^2 \times 8^2 \times 2$,

d'où : $h_5 = 24\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide vaut donc $H_5 = 24\sqrt{2} + 12$ c'est-à-dire environ 45,94 cm.

Au rang n, on aura : $\ell_n = (n-1) \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6(n-1)\sqrt{3}$

$(h_n)^2 = (6(n-1)\sqrt{3})^2 - (6(n-1))^2 = (6(n-1))^2 \times 2$ et donc la hauteur de la pyramide est $H_n = 6(n-1)\sqrt{2} + 12$

Annexe 7 : Densité d'un empilement de sphères

Pour le professeur (source : Denis Auroux – CNRS-École Polytechnique) :

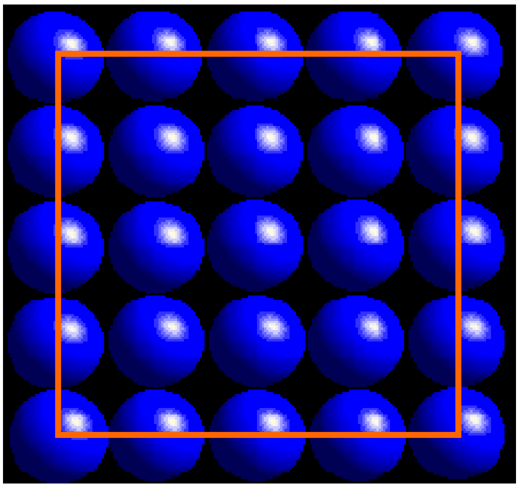
Le problème d'empilement peut être formulé mathématiquement de la façon suivante : « Quelle est la densité maximale d'un empilement de sphères pleines, toutes identiques, dans l'espace de dimension 3 ? »

On définit la densité d'un empilement en considérant un cube dont le côté tend vers l'infini : c'est la proportion du volume à l'intérieur du cube occupée par les sphères. Plus précisément, la densité est la limite (supérieure) de cette proportion lorsque la taille du cube tend vers l'infini.

La figure 1 ci-dessus montre certains empilements réguliers remarquables (dans un but de lisibilité, seuls

les centres des sphères sont représentés : en fait les sphères voisines sont en contact; de même, seule une petite partie de l'espace est montrée, l'empilement étant obtenu en juxtaposant un nombre infini de tels motifs élémentaires). **Ces assemblages sont notamment ceux selon lesquels se disposent spontanément les atomes ou les molécules dans la plupart des cristaux.** Il est “facile” de calculer la densité de ces empilements.
Par exemple, l'assemblage *cubique simple*, dans lequel les sphères sont simplement empilées en couches successives disposées en carré (voir la figure 1a), a une densité égale à peine à 0,5 (un peu plus de la moitié de l'espace, seulement, est occupé par les sphères).

Question 1 : *cas d'un assemblage cubique simple*



Considérons n^3 billes de même rayon R disposées en n “couches” identiques comme ci-contre et considérons le cube dont les sommets sont au centre d'une bille de telle façon que ses côtés ont pour longueur $(n-1)\times 2R$. D'où :

☞ **Volume du cube :** $C=\left((n-1)\times 2R\right)^3=(n-1)^3\times 8R^3$

☞ **Nombre de billes à l'intérieur du cube :**

Il y a $(n-2)^3$ billes complètement *à l'intérieur* du cube.

Les dénombrements qui suivent s'appuient sur les démonstrations détaillées à la question **2.** qui suit celle-ci.

Il y a 8 billes *aux sommets* dont seulement un huitième est à l'intérieur du cube, ce qui fait l'équivalent d'une bille.

Sur chacune des 12 *arêtes* il “reste” donc $n-2$ billes, dont seulement un quart est à l'intérieur du cube, ce fait l'équivalent de $3\times(n-2)$ billes.

Sur chacune des 6 *faces* il “reste” encore $(n-2)^2$ billes, dont seulement la moitié est à l'intérieur du cube, ce fait l'équivalent de $3\times(n-2)^2$ billes.

Le nombre total de billes à l'intérieur du cube est donc égal à : $(n-2)^3+3\times(n-2)^2+3\times(n-2)+1$

Cela peut être l'occasion de faire découvrir l'identité $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+1$ et d'en déduire que $(n-2)^3+3\times(n-2)^2+3\times(n-2)+1=\left((n-2)+1\right)^3$... et donc qu'il y a bien $(n-1)^3$ billes à l'intérieur du cube.

☞ **Volume des $(n-1)^3$ billes :** $B=\left(n-1\right)^3\times\frac{4}{3}\pi R^3$

D'où la densité cherchée : $d=\frac{B}{C}=\frac{\left(n-1\right)^3\times\frac{4}{3}\pi R^3}{\left(n-1\right)^3\times 8R^3}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$, soit $d\approx \mathbf{0,5236...}$

Remarque1 : c'est la densité que l'on trouve à partir du cube “élémentaire” ayant une bille à chacun de ses sommets, c'est-à-dire l'équivalent d'une bille à l'intérieur du cube de côté R .

La densité est bien égale à : $d=\frac{B}{C}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

Remarque2 : on obtient donc la même densité que si l'on avait considéré n^3 billes dans le cube de côté $n\times 2R$ les contenant entièrement, c'est-à-dire de volume $\left(n\times 2R\right)^3=n^3\times 8R^3$ …

$$d=\frac{B}{C}=\frac{n^3\times\frac{4}{3}\pi R^3}{n^3\times 8R^3}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

Question 2 : *cas d'un assemblage cubique centré*

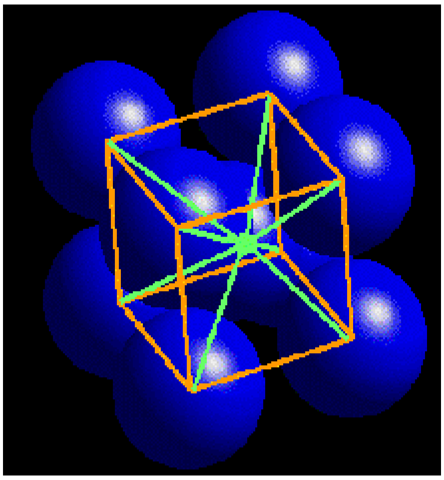
La densité peut être grandement améliorée en espaçant légèrement les sphères de façon à pouvoir insérer une sphère supplémentaire au centre de chaque cube élémentaire de telle sorte que les sphères soient tangentes selon la diagonale principale du cube dont les sommets sont les centres des 8 sphères "extérieures"on obtient alors l'***assemblage cubique centré*** (voir figure 1b et ci-contre) :

> Calculez la densité de l'assemblage *cubique centré* réalisé ci-contre par rapport au cube dont les sommets sont les centres des 8 billes "extérieures".
> *Indication :*, il vous est possible de déterminer le côté de ce cube en fonction du rayon R d'une sphère. Ensuite "il vous reste" à déterminer le volume occupé par les sphères ***à l'intérieur de ce cube***…

Le cube a pour "grande diagonale" : $D = R + 2R + R = 4R$.

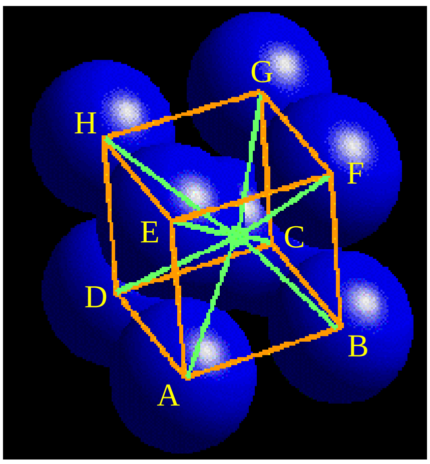
Si a est la longueur des côtés du cube on a $D = a\sqrt{3}$. D'où : $a = \dfrac{4R}{\sqrt{3}}$.

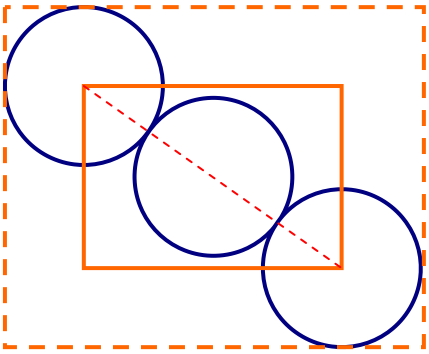
Considérons la sphère (ou bille) centrée au sommet F :



- ☞ le plan EFGH sépare cette sphère en deux demi-sphères et donc la moitié "supérieure" de cette sphère n'est pas dans le cube (la moitié qui est "au-dessus" du plan EFGH sur ce dessin) ;
- ☞ le plan BCGF sépare la moitié "inférieure" de cette sphère en deux quarts de sphère et donc un quart de plus de cette sphère n'est pas dans le cube (le quart qui se trouve "à droite" du plan BCFG sur ce dessin) ; il ne reste plus qu'un quart de la sphère dans le cube.
- ☞ enfin, le plan ABFE sépare le quart restant de cette sphère en deux huitièmes de sphère et donc un huitième de plus de cette sphère n'est pas dans le cube (le huitième et qui se trouve "devant " le plan ABFE sur ce dessin).

Remarque : un logiciel comme CABRI 3D permet de bien visualiser les coupes de la sphère par les différents plans.





Il n'y a donc qu'un huitième des sphères centrées aux sommets qui se trouve dans le cube et il y a donc l'équivalent de $8 \times \dfrac{1}{8} + 1 = 2$ sphères à l'intérieur du cube, d'où la **densité** :

$$d = \frac{2 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{8}{3}\pi R^3 \times \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 16 R^3} = \boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{3}}{8}} \approx \mathbf{0{,}6802...}$$

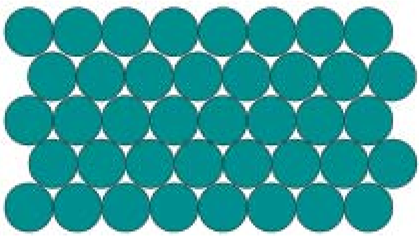
Pour le professeur :

La conjecture de Kepler (1610) : « *La densité maximale d'un empilement de sphères en dimension 3 est* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$*, c'est-à-dire la densité du réseau cubique à faces centrées.* »

En effet une méthode encore plus efficace pour améliorer l'empilement consiste à insérer des sphères supplémentaires non plus au centre des cubes, mais au centre de chacune des faces des cubes d'un empilement cubique simple (voir figure 1c). L'**assemblage** ainsi obtenu est dit ***cubique à faces centrées***, et sa densité vaut $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$.

Un autre empilement très dense est l'**assemblage hexagonal compact**, obtenu en empilant des couches de sphères disposées en hexagone, chaque couche étant décalée par rapport à ses voisines (voir figure 1d). La densité de cet empilement est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$, la même que pour l'empilement cubique à faces centrées. Cette coïncidence n'est pas fortuite : en observant l'assemblage cubique à faces centrées de la figure 1c dans la direction d'une diagonale du cube, on peut voir qu'il est lui aussi composé d'un empilement de couches hexagonales (mais disposées différemment).

Après de nombreuses tentatives infructueuses, la conjecture de Kepler a enfin été démontrée par **Thomas HALES** en 1998.



Les problèmes d'empilement ne se limitent pas au cas de l'espace tridimensionnel : par exemple, au lieu d'empiler des sphères dans l'espace, on peut vouloir empiler des disques dans le plan.
Ainsi, pour un empilement de disques dans le plan, la meilleure disposition est l'assemblage hexagonal (figure ci-contre), dont la densité est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069$. Toutefois, la preuve rigoureuse qu'il n'existe pas de meilleur empilement de disques n'a été obtenue qu'en 1910, par **THUE**.

Annexe 8 : Expériences de cristallisation

Pour le professeur

La cristallisation, processus physique et non pas chimique, peut être observée à trois occasions :

- Refroidissement d'un liquide pur de manière très lente, celui-ci passe de l'état liquide à l'état solide (mais tous les liquides ne donnent pas des solides cristallisés).
- Refroidissement d'une solution saturée par une poudre soluble à chaud mais pas à froid dans le solvant, la solubilité diminue lorsque la température diminue et le solide dissous cristallise.
- Évaporation d'une solution contenant une poudre soluble dans le solvant, la concentration augmente au fur et à mesure que le solvant s'évapore, le solide cristallise.

Dans les deux derniers cas, c'est la solubilité d'un composé dans un solvant qui est responsable de la cristallisation. La solubilité est la quantité maximale de poudre que l'on peut dissoudre dans un solvant. Lorsque la poudre ne se dissout plus, on dit que la solution est saturée.

Le refroidissement étant assez lent, nous utilisons ici la troisième façon de cristalliser un composé : utiliser un solvant qui s'évapore facilement.

Dans ce TP les protocoles sont donnés directement aux élèves qui doivent les mettre en œuvre expérimentalement en respectant toutes les consignes de sécurité. C'est l'occasion de revenir sur tout l'aspect sécurité lorsqu'on travaille dans une salle de chimie.

Cristallisation rapide sur vitre de l'acide benzoïque

Précautions :

Outre les précautions d'usage en chimie, cette expérience comporte les attentions suivantes :

- Lorsqu'on chauffe une solution d'éthanol il ne faut pas approcher de flammes à cause des vapeurs inflammables.
- L'acide benzoïque est irritant. En fin de manipulation, aérer la pièce. Nettoyer la plaque avec un peu d'éthanol ou d'acétone.

Matériel :

- Plaque de verre.
- Rétroprojecteur.
- Bécher.
- Plaque chauffante.
- Éthanol absolu (alcool pur).
- Acide benzoïque.

Protocole expérimental :

- Éviter les courants d'air dans la pièce.
- Dans un petit récipient, dissoudre une demi-cuillère à café d'acide benzoïque (environ 4 g) dans deux cuillères à soupe d'éthanol pur viron 15 mL) et chauffer légèrement jusqu'à ce que la solution soit limpide.
- Sur une plaque de verre, éventuellement posée sur un rétroprojecteur, verser une partie de la solution alcoolique. Le liquide s'étale en flaque.
- Attendre que l'alcool s'évapore, cela peut prendre 5 minutes, et observer les cristaux qui apparaissent sur le pourtour de la flaque. Petit à petit les cristaux gagnent le centre de la plaque.
- Lorsqu'on souffle sur la plaque, la cristallisation est plus rapide.
- Plus la cristallisation est lente et plus les cristaux prennent la forme d'aiguilles.
- Lorsque tout l'alcool est évaporé, le solide est fixé sur la vitre

Sublimation puis cristallisation de l’acide benzoïque

La matière peut exister sous trois états différents : solide, liquide, gaz. Le passage direct de l’état solide à l’état gazeux s’appelle la *sublimation*. Le chemin inverse s’appelle la condensation. Nous illustrons ici ces deux passages et nous obtenons de beaux cristaux semblables à du givre.

Matériel :

- Un grand bécher en Pyrex® (1 ou 2 L).
- Une plaque de verre, à défaut un couvercle pour le bécher.
- Une plaque chauffante.
- Acide benzoïque C_6H_5-COOH environ 20 g.
- Éthanol (alcool de pharmacie).
- Des petites branches de sapin ou d’arbuste.

Protocole expérimental :

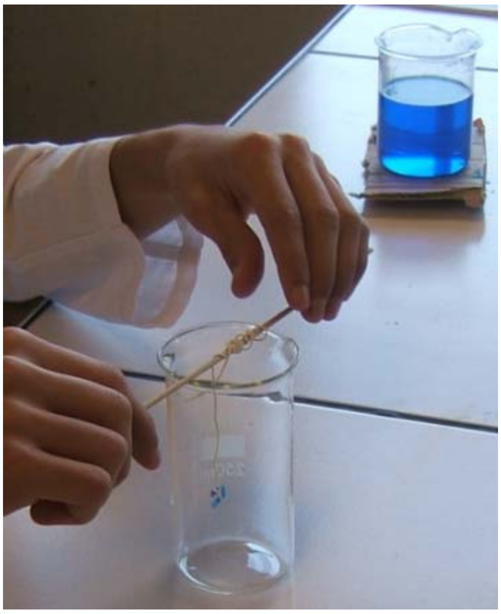
- Dans le bécher, mettre 20 g d’acide benzoïque en poudre et placer la petite branche de sapin ou d’arbuste.
- Poser la plaque de verre ou le couvercle sur le bécher (ne pas fermer hermétiquement !).
- Poser le bécher sur la plaque chauffante et régler la température à environ 100 °C (pas plus).
- Observer la sublimation de l’acide benzoïque, qui forme une fumée dans le bécher, ainsi que la condensation des vapeurs d’acide sur la branche, en forme de cristaux ou d’aiguilles (ne pas soulever le couvercle).
- Éteindre la plaque chauffante et laisser le système refroidir pendant 10 minutes.
- Observer les cristaux d’acide benzoïque qui tourbillonnent dans le récipient comme une tempête de neige miniature.
- Une fois l’expérience terminée, lorsque c’est froid, verser de l’alcool dans le bécher pour dissoudre l’acide et laver à l’eau du robinet puis avec du liquide vaisselle.

Cristallisation du sulfate de cuivre

Il s’agit d’un protocole tout à fait classique à partir d’une solution saturée de sulfate de cuivre qu’on laisse refroidir lentement.

Si on laisse tremper dans le bécher un petit bout de fil accroché à une tige en bois les cristaux vont se développer autour de la partie immergée de la ficelle.

Si on ne met rien, les cristaux se déposent au fond du bécher

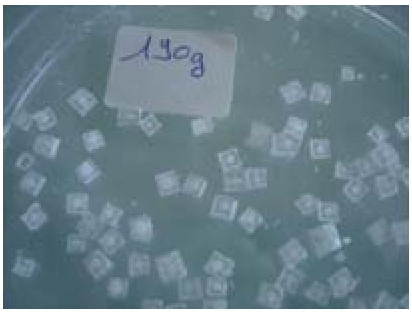


Annexe 9 : Influence des facteurs naturels sur la cristallisation

Relevé des résultats obtenus et poursuite des expériences :

Pour chaque bac d'évaporation et décantation, les élèves notent l'aspect des cristaux obtenus (taille, couleur…) et les récupèrent avec des pinces fines dans des boites de Pétri.
Des propriétés sont mises en évidence pour obtenir "les plus beaux cristaux".
Au cours de la semaine, on peut proposer aux élèves de passer régulièrement pour voir au bout de combien de temps la cristallisation démarre ou est obtenue.

Quelques exemples de cristaux obtenus par les élèves :



Pour le professeur

Objectifs :
- étudier les facteurs naturels qui influent sur les techniques d'extraction du sel et de voir l'incidence qu'ils peuvent avoir sur la nature des cristaux obtenus ;
- fabriquer des cristaux de chlorure de sodium en laboratoire.

Note : les tableaux de mesures indiqués sont ceux proposés par une classe, ils sont donnés à titre indicatif.

☞ Mise en évidence des facteurs indispensables à la récolte de sel

(dans l'hypothèse où on a effectué une visite des Salins)

1. Lors de la visite des salins, vous avez découvert les processus mis en œuvre afin d'optimiser la récolte de sel à partir de l'eau de mer. Rappeler les différentes étapes en décrivant la méthode physico chimique mise en jeu.

Le sel ou chlorure de sodium est dissous dans la solution aqueuse. Il faut concentrer cette solution en chlorure de sodium afin d'atteindre une concentration de 260 $g.L^{-1}$. Pour cela on doit laisser évaporer l'eau par passage successif dans les partènements. Lorsque la concentration est voisine de 260 $g.L^{-1}$, on stocke l'eau sur les tables salantes, où sous l'effet du soleil et du vent, l'eau va s'évaporer et la cristallisation s'amorcer. Le sel se dépose au fond des bassins par décantation.

2. Lors de la décantation, expliquer ce que l'on trouve dans les bassins en partant de la surface et en allant vers le fond.

On trouve en surface une eau peu salée et en allant vers le fond une eau de plus en plus salée car la densité de l'eau salée augmente avec sa teneur en sel.

3. Lors de la décantation, quels sont les deux facteurs naturels qui peuvent influencer l'évaporation de l'eau ?

En présence de forte chaleur et de vent, l'évaporation de l'eau sera plus rapide.

En déduire la période la plus propice pour récolter le sel ?

Après l'été.

Quel autre facteur physique influence les conditions d'évaporation ? Comment doit-on construire les bassins ?

Plus la surface d'évaporation est grande, plus celle-ci sera rapide. On construit des bassins de grande surface et de faible profondeur.

☞ Mise en place d'un protocole d'étude des facteurs influençant la décantation et l'évaporation

Dans cette partie vous devrez faire preuve d'imagination pour décrire des protocoles expérimentaux (réalisables en classe) permettant de simuler et faire varier les différents facteurs qui influencent l'extraction du sel.

1. Rechercher la salinité de l'eau en mer Méditerranée. Toutes les mers possèdent-elles la même salinité ?

On appelle salinité la teneur totale en sels dissous dans l'eau de mer et pas seulement en chlorure de sodium. Ces sels sont composés de six ions principaux : ions sodium ($Na+$) et chlorure (Cl^-), pour un total de 85% puis d'ions sulfate (SO_4^{2-}), magnésium (Mg^{2+}), calcium ($Ca^{2+)}$ et potassium (K^+).

La moyenne est de 35 $g.L^{-1}$, mais varie d'une mer à l'autre : 30 $g.L^{-1}$ en Atlantique Nord, 40 $g.L^{-1}$ en mer Rouge, 6 $g.L^{-1}$ en surface en mer Baltique et 330 $g.L^{-1}$ dans la mer Morte.

2. Rechercher la solubilité maximale du chlorure de sodium dans l'eau.

On attend que les élèves trouvent la valeur : 360 $g.L^{-1}$

Proposer une expérience permettant de le vérifier.

Dans un bécher on verse 100 mL d'eau distillée mesurés avec l'éprouvette. On pèse 36 g de sel et on les dissout petit à petit dans l'eau avec une agitation magnétique.

3. Rechercher la concentration massique de l'eau dans les marais salants juste avant la phase d'évaporation finale de l'eau. *(recherche inutile si on a effectué une visite des salins)*

A 260$g.L^{-1}$ c'est NaCl qui cristallise ; si on concentrait davantage on ferait aussi cristalliser les sulfates et les chlorures de magnésium contenus dans l'eau de mer. Au tout début dans les tables salantes c'est le gypse (sulfate de magnésium) qui se dépose mais il n'est pas récupéré.

4. Comment simuler le bassin de décantation, les deux facteurs naturels?

Cristallisoir, lampe et sèche-cheveux. Il s'agit de travailler avec du matériel que l'on peut se procurer facilement (Les cristallisoirs peuvent être remplacés par des bacs en plastique type Tupperware, les sèche-cheveux doivent être équipés d'une fonction air froid).

5. Proposer des protocoles expérimentaux permettant de faire varier les différents paramètres et d'étudier les différentes conditions d'évaporation pour en déduire l'influence sur les dépôts observés.

C'est la partie la plus importante où on va faire appel à l'investissement personnel des élèves et au travail d'équipe afin d'établir les différents protocoles, de dresser la liste du matériel nécessaire et de se répartir le travail expérimental qui sera réalisé dans une prochaine séance.

Possibilité de dresser un tableau à double entrée permettant de trouver toutes les conditions. Ci-dessous voici un exemple de tableau obtenu avec une classe de 2nde.

Concentration massique en sel	*À l'air ambiant*	*Avec lampe (noter la température)*	*Avec sèche-cheveux*	*Avec lampe et sèche-cheveux*
35 g.L^{-1}			*Rq. : les élèves réalisent lors de la mise en route des expériences que le sèche-cheveux chauffe et qu'il faut donc des positions air froid.*	*Rq. : si on n'a pas assez de lampes on peut ne pas en mettre car le sèche-cheveux apporte chaleur et vent.*
70 g.L^{-1}				
105 g.L^{-1}				
140 g.L^{-1}				
175 g.L^{-1}				
210 g.L^{-1}				
245 g.L^{-1}				

Cela fait 28 expériences à réaliser. En fonction du nombre d'élèves on peut supprimer une ligne sur deux dans le tableau.

Remarque : l'année où nous avons réalisé ce travail, deux groupes de 18 élèves travaillaient sur ce thème et les expériences avaient été réparties sur les deux groupes ce qui faisait une à deux expériences par binôme d'élèves.

Liste du matériel :

- *28 cristallisoirs (pas trop grands afin d'avoir une épaisseur de liquide d'environ 1cm)*
- *Plusieurs sèche-cheveux (un sèche-cheveux pouvant servir au dessus de plusieurs bacs si on le fixe suffisamment haut)*
- *10 lampes (type lampe de bureau)*
- *10 éprouvettes graduées de 100 mL*
- *10 balances à 0,1g*
- *10 erlenmeyers de 250 mL*
- *10 capsules de pesée*
- *8 agitateurs magnétiques*
- *8 spatules*
- *Chlorure de sodium (1kg de sel fin)*

La séance suivante sera entièrement et uniquement consacrée à la réalisation des expériences, qui devront être mises en attente pour une semaine avant de venir noter les résultats obtenus.

Exemples de fabrication de cristaux de sulfate de cuivre

Annexe 10 : Étude de la structure cristalline microscopique du chlorure de sodium

- ☞ Version exploratoire destinée aux élèves
- ☞ Quelques aides possibles
- ☞ Des compléments pour le professeur

Version exploratoire destinée aux élèves

Cristaux de chlorure de sodium fabriqués par les élèves

Objectif : Expliquer la forme des cristaux de chlorure de sodium à partir d'un modèle microscopique d'arrangement des entités chimiques.

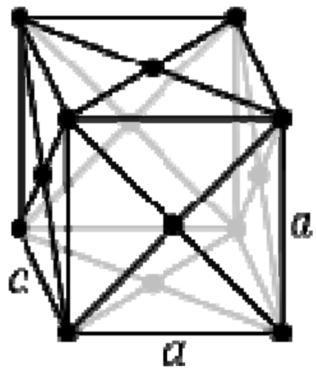
Données :

Le chlorure de sodium (de formule brute NaCl) est un composé ionique formé d'ions sodium (Na^+) et d'ions chlorure (Cl^-). À l'état solide c'est un cristal : il présente uns structure périodique et symétrique.

En cristallographie, la maille élémentaire (ou maille) est la plus petite partie de l'espace qui se reproduit identique à elle-même dans tout le cristal.

Le sel est un assemblage d'ions sodium et chlorure basé sur une structure cubique à faces centrées.

Structure cubique à faces centrées :



Les ions sodium et chlorure sont rangés chacun suivant une structure cubique à faces centrées de côté *a*, en translation l'une par rapport à l'autre de *a*/2.

Mission 1 :

Représenter une maille du cristal de chlorure de chlorure de sodium.
Expliquer la cohérence entre la structure cristalline microscopique et la formule brute du chlorure de sodium.

Mission 2 :

Déterminer la compacité du cristal de chlorure de sodium.
Proposer une interprétation des deux diagonales observables à l'œil nu sur les cristaux de chlorure de sodium fabriqués.

Données :

Un cristal se développe de manière préférentielle suivant les lignes de plus fortes densité de matière.

On appelle compacité d'un cristal le rapport du volume occupé par les ions au volume de la maille, exprimé en pourcentage.

Quelques données physico-chimiques :

Masse volumique du chlorure de sodium : $\mu = 2163 \text{ kg m}^{-3}$
Rayons ioniques : $r(Na^+) = 97$ pm ; $r(Cl^-) = 181$ pm

Quelques aides…:

Que signifie la donnée : « Les ions sodium et chlorure sont rangés chacun suivant une structure cubique à faces centrées de côté a, en translation l'une par rapport à l'autre de a/2. » ?

Tracer en perspective3D la maille correspondant à la double structure cfc. En considérant un seul cube, montrer que la structure du sel peut être décrite par le contenu de sa maille. Cette maille de sel est un cube qui est formé : d'un ion de chlorure placé à chaque sommet de la maille ; d'un ion chlorure au centre de chaque face de la maille ; d'un ion sodium au centre de la maille ; d'un ion sodium au milieu de chaque arête de la maille.

Quel est le nombre d'ions sodium et d'ion chlorure réellement contenu dans une maille ?
Y a-t-il compatibilité avec l'électroneutralité de la matière ?

Notes importantes :

- Possibilité d'utiliser un jeu de cubes d'enfant et de la pâte à modeler de couleurs différentes, pour aider les élèves à visualiser les translations et à compter à copter le nombre d'ions dans la maille pour vérifier l'électro neutralité de la matière.
- Possibilité d'utiliser un applet pour animer la translation réalisé avec un logiciel de type Geoplan ou Geospace, logiciel gratuit utilisé en mathématiques.

Questions complémentaires :

Quelle est la relation entre la masse volumique et la masse ?

Quelle est la masse d'une maille élémentaire ? Quel est son volume ?

Quelle est la distance minimale dans la maille correspondant à des ions de même charge électrique ?

Quelques aides

- Rappeler la forme géométrique des cristaux de sel que vous avez fabriqués en classe et observés avec la loupe binoculaire.
- Donner la formule brute à l'état solide du chlorure de sodium.
- En réalité il s'agit d'un composé ionique formé d'ions sodium et d'ions chlorure.

Rechercher dans le tableau de classification périodique des éléments chimiques le numéro atomique des éléments sodium et chlore.

Ecrire pour chacun de ses éléments la structure électronique. En déduire les ions qu'ils sont susceptibles de former.

En déduire la formule ionique du chlorure de sodium.

- Le sel est un assemblage d'ions sodium et chlorure de maille cubique. Le sel est un cristal, car les ions forment une structure périodique et symétrique.

La structure du sel peut être décrite par le contenu de sa maille. Une maille de sel est un cube qui est formé : d'un ion de chlorure placé à chaque sommet de la maille ;
d'un ion chlorure au centre de chaque face de la maille ;
d'un ion sodium au centre de la maille ;
d'un ion sodium au milieu de chaque arête de la maille.

On peut faire trouver le positionnement des ions aux élèves à partir du modèle de la structure

En choisissant des couleurs différentes pour les ions sodium et les ions chlorures, représenter cette maille cristalline.

- Calculer le nombre d'ions sodium et d'ion chlorure réellement contenu dans une maille. Ce résultat est-il en accord avec la formule ionique du cristal de sel précédemment établie ?
- La coordinence est le nombre de plus proches ions voisins dans la structure.
  Déterminer la coordinence pour l'ion sodium, puis pour l'ion chlorure.
  Quelle figure géométrique forment les ions chlorures autour d'un ion sodium et réciproquement ?
  Faire apparaitre cette figure sur le schéma de la maille cristalline que vous avez dessinée.
- On peut aussi décrire la maille de chlorure de sodium par deux réseaux cubiques à faces centrées, l'un d'ion sodium, l'autre d'ion chlorure ayant subit l'un par rapport à l'autre une transformation géométrique. Laquelle ?

Il y a une translation parallèle aux arêtes de la maille et de valeur égale à a/2 que les élèves perçoivent assez facilement.

❈ Rechercher la masse volumique du chlorure de sodium cristallisé. En déduire la longueur de l'arête de la maille.

Rechercher les rayons ioniques des ions chlorure et sodium

La longueur de l'arête trouvée précédemment est-elle compatible avec les valeurs des rayons ioniques.

On appelle compacité d'un cristal le rapport du volume occupé par les ions au volume de la maille. Calculer la compacité du cristal de chlorure de sodium.

❈ Sachant qu'un cristal se développe de manière préférentielle suivant les lignes de plus fortes densité de matière, et en observant la maille de cristal de sel pouvez-vous justifier les lignes diagonales que l'on voyait lors de l'observation des cristaux de sel tant à l'œil nu qu'à la loupe binoculaire.

Maille de chlorure de sodium (Aide éventuelle pour la mission 1, ou à donner aux élèves avant la mission 2)